M

ELEMENTA MATHEMATICA *NATURALI* PHILOSOPHIÆ ANCILLANTIA,

AD
Præfixam in Scholis nostris norm
Concinnata

A P. MAXIMILIANO HÖLL,
e S. J. Philosophiæ Doctore, Matheseos
Prof. Publ. & Ord.
IN ACADEMIA S. J. CLAUDIOPOLITANA
TRANSYLVANIÆ

TOMULUS I.

Complectens
Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis
seu Algebræ.

Liber Conv. Cibiniens

CLAUDIOPOLI,

TYPIS ACADEMICIS S. J. ANNO 1755.

PRÆFATIO

AD LECTOREM.

Cum annis abhinc decem JOANNIS CRIVELLII *de Arithmetica literali Opuſculo deſideratis augendo, mendiſque repurgando in uſum Tyronum Philoſophiæ properatam Altiorum Imperio operam locarem, nihil minus animo præceperam, quam & me penum Mathematicam ſcriptis ſubinde oneraturum. Tot quippe Recentiorum inventis optimis ſcientia hæc, vel mea ætate aucta, ut rectiora, aut non dicta prius adferri vix poſſe facile intelligerem, poſtquam mei olim in Mathematicis Profeſſoris*

Erasmi Frœlichii, *viri è Societate mea ab eruditis lucubrationibus per Europam clarissimi*, Introductio facilis in Mathesim ad usum Tyronum Philosophiæ Provinciæ Austriæ S. J. conscripta, *in usum publicum prodiit; Quanti hæc pretii nostris in Academiis usque sit, usus, quo in manibus Tyronum nostrorum etiam hodie versatur, palam facit. At enim mutata per Academias nostras Studiorum Ratione, præfixa Collegiis Mathematicis publicarum Prælectionum Norma opusculum postulabat, quo Prima* Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ, Trigonometriæ, *ac* Utriusque Architecturæ *Principia Theoretica, & Practica, eaque usibus etiam communibus applicata, ita pertractarentur, ut primis Tyronum conatibus forent accommoda, essetque libellus materia plenus, mole parvus, regulis necessariis brevis, exemplis certo consilio electis longus, iisque prodesset maxime, quibus ne prima quidem Arithmetices principia innotuêre. Hæc, nec præterea alia, quum, in unum concinnata opusculum, Authorem adhuc desiderabant, causam perspicis L. B. laboris tumultuarii in gratiam meorum Tyronum suscepti, quorum utilitati nolle consultum, ejus non esse putavi, qui se, suaque omnia DEI Gloriæ, omniumque commodis consecrasset. Jam vero, quæ præstitisse in hoc opusculo conatus fuerim paucis accipe.* Me-

Methodum, *(non rigorem) sectando Mathematicam, Theoriam Praxi ita sociare satagebam, ut è paucis* Theorematibus, *tanquam fontibus, utilissimorum Problematum copiam derivarem;* Problemata *necessariis duntaxat, iisque in casus distinctis regulis instruxi, Exemplis autem, & copiosis, & utilissimis declaravi; ex his* Corollaria *permulta deduxi; In* Scholiis *denique haud parcus, dubia resolvi, utilia monui, cumque mihi ejusmodi Tyronibus scribendum esset, ad quos vix nomen* Algebræ *usque penetraverat, multis opus erat, quibus futuram* Analyseos *utilitatem, mirandamque vim oculis ipsis exhiberem, generosos cætera, at in scientia nova peregrinos animos, novis identidem stimulis ad æmulandos eruditarum gentium doctos labores, ac studia incitarem; universim in id conatus meos intendebam unice, ut scientias Mathematicas, quibus à pueritia innutritus delector maxime, discentibus faciles, jucundas, utilesque comprobarem, obscura, aut ambigua, quæ novis Tyronibus, plurium annorum doctus experientia, negotium facessere novi, partim declararem, partim surrogatis aliis, tollerem; finem hunc consequendi gratia, etsi in concinnandis partibus singulis operam qualemcunque adhibuerim, præcipuam tamen in enucleandis penitius Elementis Algebræ impendisse me non diffiteor.* Por-

Porro, si quid ex aliena, à Societ. mea, penu huic opusculo intuli, id loci Clarissimi Authoris Nomen non dissimulavi, Authoribus tamen Societatis meæ collaudandis parcens de industria; Isthic namque, quidquid in hoc meo opusculo egregium præter cætera L. B. legerit, id me à viris Societatis nostræ Clarissimis R. P. Josepho Franzio, & Erasmo Frœlichio (*quorum* Primo *Praxim omnem Mathematicam, cumprimis Astronomicam, Physicasque disciplinas*, Alteri *Theoriam mathematum in acceptis gratus refero*) *olim hausisse profiteor; sin quid minus recte dictum, id solum quidem imbecillitati meæ, ac properato labori tribuendum cupio.*

Neque velim quispiam isthic sublimia quærat, Philosophiæ Naturali *duntaxat* ancillari *cupio hæc mea Elementa, non* dominari *disciplinis Mathematicis, tametsi noverim, ea hujusmodi esse, quibus instructi Tyrones in Mathesi utraque pura nempe, & mixta, felicissimos ad DEI Gloriam, Patriæque utilitatem progressus facere valeant; Præterea iis quoque prodesse hisce elementis volui, qui melioribus destituti præsidiis Marte proprio, cumprimis Arithmeticam condiscere ad usus Civiles gestiunt, horum gratia complura* Lector *reperiet, quæ iisdem usibus deserviant commode. Fruere itaque L. B. meosque ad DEI Gloriam conatus, eo velim suscipias animo, quo damus.*

PRO-

PROLEGOMENA
IN
MATHESIM UNIVERSAM
De Methodo Mathematica.

I.

Mathesis (voce Græca Μάθησις *Scientia*, vel *Disciplina* per Antonomasiam appellata) est *Scientia Quanti*. Dividitur in *Mathesim puram*, & *Mixtam*. Mathesis *pura* est scientia Quanti abstracti ab omni materia, habetque pro objecto quidquid numerabile, aut mensurabile est, cujusmodi sunt *Algebra* juncta *Arithmeticæ numericæ*, cum *Geometria pura*. Mathesis *mixta* dicitur, quæ materiis physicis applicatur, ejusmodi sunt; *Geometria mixta*, *Statica*, *Mecha-*

vica, *Hydraulica* &c. Mathesis pura scientia est certissima, *Mixta* secundum formam Mathematicam solum certa est, non item semper secundum materiam.

II. *Methodus mathematica* est ordo, seu modus quidam peculiaris, quo Mathesis utitur ad veritates suas inveniendas, demonstrandas, tradendasque. Dividitur hæc bifariam, in methodum nempe *Analyticam*, & *Syntheticam*. Methodus *Analytica*, seu *Resolutoria* inveniendis, detegendisque veritatibus famulatur; *Synthetica*, seu *Compositoria*, ea, quæ ope Analysis reperta sunt, in ordinem disponit, veritatemque veritati ita componendo nectit, ut abs se invicem, non secus atque catenæ annuli dependeant; inservit hæc tradendis suis dogmatibus mathematicis. In Methodo itaque *Synthetica*, adhibentur I. *Definitiones*. II. *Postulata*. III. *Axiomata*. IV. *Experientiæ*. V. *Hypotheses*. VI. *Propositiones*. VII. *Demonstrationes*. VIII. *Theoremata*. IX. *Problemata*. X. *Porismata*, seu *Lemmata*. XI. *Corollaria*. XII. *Scholia*.

III. *Definitio* est distincta notio, vel explicatio Rei, aut Nominis, de quo agitur. *Ex. gr.* *Numerus* est ordinata unitatum multitudo.

IV. *Postulatum* dicitur, quod fieri posse, ab alio nobis facile concedendum postulamus. *Ex. gr. Ab uno puncto ad aliud ducere lineam.*

V. *Axioma* (Ἀξίωμα *dignum creditu*) est veritas perceptis rite terminis per se, vel ex terminis manifesta, aut lumine naturæ nota. *Ex. gr. Totum est majus sua parte.*

VI. *Hypothesis* (Ὑπόθεσις *Suppositio*) sunt res, vel signa rerum ad libitum ex institutione hominum assumpta, *Ex. gr.* si loco vocis *Æquale* assumatur signum =, aut loco numeri 5 litera *a*, vel *b*, hujusmodi sunt in Astronomia loco *Solis* ☉, loco *Lunæ* ☾, &c.

VII. *Experientia* est effectus quispiam sive sensu externo, sive interno perceptus simul, & cognitus, *Ex. gr.* dum stellæ, quæ interdiu non videbantur, sole occumbente, nocte serena, conspiciuntur. *Experientiæ* itaque sunt tantum rerum singularium perceptiones cognitæ.

VIII. *Propositio* est enunciatio clara, & distincta propositæ alicujus veritatis, vel praxeos; & hinc duplex est *Speculativa*, aut *Theoretica*, & *Practica*. Speculativa propositio est enunciatio clara, & distincta veritatis cujuspiam, id est, quid rei cuipiam sub certis conditionibus, aut etiam abſolute convenire poſſit, quid non. *Ex. gr. Si duo numeri invicem multiplicentur, idem factum producitur ſive primus in ſecundum, ſive ſecundus in primum ducatur. Propoſitio practica* dicitur, quæ aliquid faciendum, aut efficiendum proponit. *Ex. gr. Additionem numericam facere, ſeu addere numeros.* Porro utraque propoſitio ſubdividitur in *Conditionatam*, ſeu *Hypotheticam*, & in *Abſolutam. Hypothetica* eſt, quæ enunciat veritatem, aut aliquid efficiendum proponit ſub certis conditionibus; *Ex. gr. Si quatuor termini ſunt proportionales, erit factum duorum extremorum æquale facto mediorum.* Ubi ſub conditione proportionalitatis enunciatur æqualitas facti extremorum cum facto mediorum. *Abſoluta* eſt, quæ ſub nulla conditione proponitur. *Ex. gr. Quod multiplicatio componit, tollit diviſio.*

IX. *Demonſtratio* eſt brevis argumentatio ex principiis jam certis deducta, qua intellectus convincitur ad affirmandum, vel negandum id, quod in propoſitione ſeu ſtatu quæſtionis affirmabatur, vel negabatur.

X. *Theorema* (Θεώρημα *Speculatio*) eſt complexum ex propoſitione ſpeculativa univerſali, & ex demonſtratione conſtans, ſeu eſt veritas propoſita ſimul, & demonſtrata. *Ex. gr.* Si proponatur hæc veritas:

Quod

Quod multiplicatio componit, tollit diviſio, & ſimul per adnexam demonſtrationem id ipſum probetur, erit complexum hoc Theorema. Finitur Theorema, vel potius Demonſtratio his notis: Q. E. D. id eſt: *Quod erat demonſtrandum.*

XI. *Problema* (Πρόϐλημα *Propoſitum*, ſeu *res ad faciendum propoſita*) eſt complexum ex *Propoſitione practica*, ſeu quæ aliquid faciendum proponit, ex *Reſolutione*, qua res propoſita fieri docetur, & ex *Demonſtratione*, qua demonſtratur Reſolutionem datam rite factam eſſe, ut proponebatur. *Reſolutio* finiri ſolet his notis: Q. E. F. id eſt, *Quod erat faciendum.*

XII. *Poriſma* (Πόρισμα *Præparatio, Tranſitus*) eſt Theorema prævium, aut præmiſſum ad aliud ſequens Theorema, vel Problema aliquod illuſtre facilius, aut brevius demonſtrandum, vocatur etiam *Lemma* (Λῆμμα *acceptio*, vel *propoſitum.*)

XIII. *Corollaria* ſunt veritates, vel praxes ex Definitione, Axiomate, Theoremate, vel Problemate ultro fluentes ſine adhibita, aut ſaltem quam ſimpliciſſima nova demonſtratione.

XIV. *Scholia* (Σχόλια) ſunt adnotationes quædam poſt Definitiones, Propoſitiones, Corollaria &c. poſitæ, quibus obſcura declarantur, dubia reſolvuntur, uſus

do-

doctrinæ indicatur, eruditio aliqua proponitur, aut quidvis aliud ſcitu non injucundum adfertur, aut opportune monetur.

XV. Adhibentur quoque in hac methodo numeri Paragraphorum, ut horum ope, aliis in locis uſurpata nomina, aut veritates in memoriam, ſi forte excidiſſent, relegendo revocari facile queant, ſimulque, ut prolixæ earundem rerum, aut definitionum repetitioni via præcludaretur.

XVI. Methodus itaque Mathematica exigit, ut ante omnia voces, & res omnes clare, & diſtincte definiantur, præmittantur Axiomata, Hypotheſes, & Poſtulata, ſi iis opus ſit, dein ſtatus quæſtionis proponatur itidem diſtincte, clare, & breviſſime, id eſt, fiat Propoſitio clara, & diſtincta; facta Propoſitione id, quod propoſitum erat, & ſub iisdem conditionibus, nec aliud, ſuccincte, & clarè demonſtretur. In demonſtrationibus nihil adhibeatur, quod vel jam prius demonſtratum, definitum, aut declaratum non ſit; id maxime cavendum, ne ſuperfluum aliquid adferatur, ſed uno, alterove Enthymemate, aut Syllogiſmo *concluſio*, quæ identica ſit cum propoſitione facta, inferatur. Ex his utilia Corollaria deducantur, & Scholia ſubjiciantur, ſi opus ſit.

XVII.

XVII. Ordo autem Propositionum, aut Theorematum caute observandus, ut maxime simplicia, & facillima antecedant, ex his ad sublimiora tanquam per gradus quosdam progrediendum, in hoc progressu ita sibi connexæ succedant propositiones, & veritates, ut posteriorem ex priore consequi necesse sit, itaque dependeant, ut posteriores sine prioribus consistere non possint. Verum de methodo hac mathematica, quæ hic strictim relata sunt, fuse videri possunt in eleganti opusculo *R. P. Philippi Steinmeyer*, *e S. J.* sub titulo: *Regulæ præcipuæ methodi Mathematicæ, seu scientificæ, Augustæ Vindel.* 1750. *in* 8vo. Item *Illust. Christiani Wolfii*, *De Methodo Mathematica brevis commentatio*, Elementis suis Matheseos præfixa.

MONITA

AD TYRONES MATHESEOS,

De Methodo legendi libros Mathematicos.

I.

DEfinitiones intime sibi perspectas habeat Tyro Mathematicus, easque memoria non fallente retinere studeat, ac sæpius repetendo earum usum sibi familiarem reddat.

II. Axiomata quoque (quæ, uti definitiones, fundamenta sunt primarum demonstrationum) è memoria sinè hæsitatione depromere asuescat.

III. Propositionem factam, sive statum quæstionis propositum, & demonstrandum, aut practicè efficendum omnimode perspiciat, ac intelligat, & si plures complectatur partes, singulas distincte cognoscat oportet, videatque, sub quibus conditionibus enuncientur; nec prius ad legendam, intelligendamque subjectam demonstrationem progrediatur, quam propositionem penitus sibi cognitam habeat.

IV. Non inutile videtur monitum quorundam, ut intellecta probe Propositione, si affirmativa sit, negativam, si negativa, affirmativam *fingat esse veriorem, nec ante veram admittat, nisi intellectu per subjectam propositioni demonstrationem integre convicto.* Ex. gr. *Sit Propositio*: In omni proportione Geometrica factum extremorum est æquale facto mediorum. *Ante, quam ad legendam demonstrationem accedam, fingo non esse verum, aut saltem dubium videri, quod in omni* Proportione Geometrica factum extremorum, debeat esse æquale facto mediorum. *Neque enim quærenti veritatem, cum primis Mathematicam, quidpiam admittendum, aut affirmandum est, de cujus veritate intellectus convictus non sit, cum in dogmatibus Mathematicis, humana enunciantis authoritas nullius, aut certe non majoris ponderis esse debeat, quam vis argumentorum, seu propositæ rationes.*

V. Dum demonstrationem legit, videat, an præmissas evidentes intelligat, si de sensu, aut veritate cujuspiam dubitet, citatum eo in loco paragraphum evolvat, omniaque, quæ sub eo numero continentur, relegat, & experietur dubium sibi omne de veritate

sub-

sub um. Hujusmodi enim dubium frequentissimum est . ironum vitium propterea , quod , quæ antecesserun , & in quibus propositiones demonstrationum fundan ur , Tyronibus facillime è memoria excidant. und , quæ exercitato clara , & manifesta sunt , ea Tyronibus obscura , & dubia videntur.

VI. Non transiliat , aut prætermittat rem ullam non intellectam , præsertim , si adsit , quem consulat , eoque ordine singula legat , quo proposita habentur ; certus namque sit, methodum Mathematicam hujusmodi esse , ut intelligentia veritatum p steriorum à priorum perspicuitate plene dependeat , nec de progressu sibi quis blandiatur , qui per saltum propositionum scientiam Mathematicam comparari posse existimat.

VII. Si veritas demonstrata quomodocunque in praxim deduci possit , per singulos casus variando exerceatur.

VIII. Propositiones practicas (præsertim Geometriæ) instrumentorum præscriptorum ope sive in charta, sive in campo , aut loco in propositione determinato resolutas, ipse exerceat , figuras delineet , construat , ac ritè factas demonstret.

IX. Si Professore utatur explanante sua , aut alterius Mathematici typis vulgata dogmata , plurimum ad profectum confert , si materiam explanandam privatim prælegendo intelligere marte proprio studeat , non intellecta , aut dubia adnotet , explicantem Professorem absque mentis evagatione (nam fixam mathemata mentem exigunt) *audiat attentus , si finita explanatione nondum sibi satisfactum advertat , tum consulat Professorem , aut cum intelligente quovis alio conferre non pudeat.*

X. Modum operandi periti Professoris ad amussim æmuletur , eundemqne constanter teneat cum primis in Algebra.

XI. Formulas Algebraicas (quarum nulla est , quæ Theorema , aut utile quoddam Problema non contineret) contemplari, quidque eloquatur, intelligere asuescat.

XII. Animadvertat ad methodum ipsam Mathematicam , quomodo , & quibus viis, ex paucis cognitis ad ignota , ex simplicibus , & quasi obviis ad sublimia detegenda feratur , eamque in aliis disciplinis seu tradendis , seu condiscendis usurpare conetur.

XIII. Universim notent Tyrones , ut cæteras disciplinas , ita Mathesim cumprimis exercitio , & usu frequentissimo comparari , conservarique.

CON-

CONSPECTU[S]
PARTIUM, ET CAPI[TU]M
Arithmeticæ numericæ.

PARS I.
De Natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

PARS II.
De Logistica Decimali.

PARS III.
De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ NUMERICÆ.

PARS I.

De natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

CAPUT I.

De Arithmetica in genere.

DEFINITIO I.

1. ARithmetica *Numerica* eſt ſcientia numerorum, hoc eſt, inquirendi in naturam Numerorum, ex qua certæ numerorum proprietates deductæ determinantur.

DEFINITIO II.

2. *Numerus* eſt ordinata unitatum multitudo.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* eſt Principium Numeri.

COROLLARIUM.

4. Ad numerum itaque conficiendum binæ ſaltem Unitates requiruntur; hinc *dualitas* eſt numerus minimus.

HYPOTHESIS I.

5. Signa, *ſeu* notæ, *quibus Arithmetica numerorum utitur*, decem *ſunt:* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *quorum ultima figura* (0) *nihil ſignificat*, *niſi ex novem aliis aliqua ante ponatur*, *& tum ejus valorem auget per* decem. *Enunciantur autem ſigna hæc hoc modo:* Unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, Zerus. *Vocantur hi numeri etiam* integri.

HYPOTHESIS II.

6. *Valor horum ſignorum:* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *ex inſtitutione hominum dependet à ſolo ordine*, *loco*, *vel ſitu*, *in quo tale ſignum locatur*, *vel ſcribitur.*

HYPOTHESIS III.

7. *Ordo*, *ſive locus cognoſcitur à dextra ſiniſtram verſus progrediendo*, E. gr. *ſint aliqua ſigna*, *ſive notæ numericæ hoc ordine locatæ:* 1 7 5 4. *tum dextima nota* 4, *valet tantum* unitates *ſimplices*, *ſequens nota* 5, *valet tot* decades, *quot ipſa unitates*

tates significat; quæ hanc consequitur, nempe 7, *valet tot* Centenarios, *quot ipsa unitates denotat; ultima denique* 1, *valet tot* Millenarios, *quot ipsa unitates significat.*

COROLLARIUM I.

8. Hinc liquet incrementum valoris numerorum ex loco desumptum, fieri sinistram versus per *Decades* antecedentium.

COROLLARIUM II.

9. Patet quoque, quod hæc signa *decem* sufficiant ad exprimendum quemcunque magnum numerum.

COROLLARIUM III.

10. *Zerus* itaque omnem locum occupat, in quo ex significantibus notis novem, aliqua non ponitur; *E. gr.* in hoc ordine: 502, ubi 0 locum *decadum* occupare debet, ut numerus 5 locum *centenariorum* occupare possit; secus enim, si non occuparet *Zerus*, sed *E. gr.* scriberetur sic: 52, numerus 5 non *centenarios*, sed *decades* significaret. (§. 6. & 7.)

SCHOLION I.

11. *Ratio hujus ordinis à dextra sinistram versus est, quia modus scribendi Orientalium (uti sunt Arabes, Hebræi, Turcæ &c. qui Arithmeticam invenerunt) est etiamnum à dextris sinistram versus; ipsa vero signa numerica (quæ literæ sunt Arabum) nos* Arabica, *ab Inventoribus Arabibus, appellamus.*

SCHOLION II.

12. *Ratio incrementi valoris per* decem *ab ipsa natura repeti debet, quæ hominem decem digitis, tamquam numerandarum rerum notis, & instrumentis dotavit, Digitis enim natura duce utimur in computando, quam diu Arithmeticæ regulis instructi non sumus.*

CAPUT II.

De Numeratione.

SPecies Arithmeticæ numerorum integrorum ſunt quinque: *Numeratio*, *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio*. De ſola numeratione hoc capite, de aliis in ſequentibus agetur.

DEFINITIO IV.

13. *Numeratio* eſt ars enunciandi, & ſcribendi quoſcunque numeros ſecundum valores ſuos totales.

PROBLEMA I.

14. PROP. *Numerum quemcunque propoſitum enunciare.*

RESOLUTIO.

I. Propoſitum numerum inchoando à dextris ſiniſtram verſus (§. 11.) per *virgulas*, ſive *commata* diſtingue in claſſes, claſſi cuilibet tres notas aſſignando, & habebis in qualibet claſſe à dextris ſiniſtram verſus, *unitates*, *decades*, & *centenarios*. (§. 7.)

II. Poſt dextimæ claſſis *virgulam* ſigna ſuperne numerum *puncto uno*, quod *millenarios* deſignat; poſt ſecundæ claſſis *virgulam*, ſigna ſuperne numerum una *virgula*, quæ *milliones* ſignificat; poſt tertiæ claſſis *virgulam*, nota ſuperne numerum ite-

iterum *puncto uno*, quod *millenarios millionum* ſignificat; poſt quartæ claſſis *virgulam* nota ſuperne numerum *duabus virgulis*, quæ *millionum milliones* ſignificat: & ſic ſemper alternando cum *punctis*, & *virgulis* à dextris ſiniſtram verſus progredere, donec ſignando numerum propoſitum abſolvas.

III. Juxta ſigna appoſita, enunciationem ordieris à ſiniſtra dextram verſus, virgulas *ſupernas* per *milliones*, puncta *ſuperna* per *millenarios*, virgulas *infernas*, ſive *comata* per *centenarios*, cæteras notas numericas per *decades*, & *unitates* appellabis, reſpiciendo ſemper ad virgulas, & puncta proxima dextram verſus. Sed hæc viva voce magis clareſcent.

Sit enunciandus, per puncta, & virgulas jam diſtinctus numerus:

	·			//			·			/			·			
8	5,	2	3	4,	7	8	9,	6	3	8,	2	5	7,	8	5	4.
Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates
Millenariorum Bimillionum.		Bimillionum.			Millenariorum Millionum.			Millionum.			Millenariorum.			Simplices.		

Igitur numerum propositum sic enunciabis: Octuaginta quinque *millia bimillionum*, ducenti triginta quatuor *bimilliones*, septingenta octuaginta novem *millia millionum*, sexcenti triginta octo *milliones*, ducenta quinquaginta septem *millia*, octingenta quinquaginta quatuor folia *E. gr.* arborum.

Demonstratio hujus enunciationis patet ex cap. I. §. 6. ad 10. inclusive.

COROLLARIUM I.

15. Ex attenta hujus exempli contemplatione, liquet *primo*: puncta superne numeris apposita exprimenda esse per vocem *millia*, virgulas autem per vocem *millionum*, & quidem una virgula simpliciter per vocem *millio*; binæ virgulæ per voces *millionum millio*, seu brevius, per vocem *bimillio*; tres virgulas per voces *millionum millionum millio* seu brevius *trimillio*, aut *trillio*: ita quatuor virgulas per vocem *quadrimillio*; quinque virgulas per vocem *quinimillio*; sex per vocem *seximillio*, & sic porro. *Secundo*: patet, ad numerum *millenarium* requiri quatuor notas numericas; ad *millionem* vero septem, ad *bimillionem* tredecim, ad *trimillionem* novemdecim, accremento videlicet sex notarum sequentium.

COROLLARIUM II.

16. Eodem modo enunciatur quivis alius numerus, in quo complures zeri reperiuntur, hoc solum notato, quod cum zerus nihil significet (§. 5.) zeri non enuncientur. Sic numerum propositum: 3,020.000,056,004,300. ita enunciabis: tria millia viginti *bimilliones*, quinquaginta sex *milliones*, quatuor *millia* trecentæ *E. gr.* atomi.

CA-

CAPUT III.
De Additione Numerica.
AXIOMA.

17. Omnis numerus vel eſt *purus*, vel *mixtus*.

DEFINITIO V.

18. Numerus *purus*, ſive *abſtractus*, aut *diſcretus* eſt, qui ſolam multitudinem ſignificat abſtractam ab omni materia rei alicujus, ut ſi dicas: *tria*, *ſeptem*, *centum &c.*

DEFINITIO VI.

19. Numerus *mixtus*, ſive *concretus*, aut *materialis* eſt, qui præter multitudinem ſignificat ſimul materiam, ſive res, cujus eſt multitudo. Ut ſi dicas: *tres calami*, vel *ſeptem floreni*, aut *centum urnæ vini* &c. numerus *mixtus* dividitur in numeros *homogeneos*, & *heterogeneos*.

DEFINITIO VII.

20. Numeri *homogenei* ſunt, qui ſignificant res ejusdem ſpeciei, & denominationis, ut *quinque calami*, & *ſeptem calami*.

DEFINITIO VIII.

21. Numeri *heterogenei* ſunt, qui ſignificant res diverſæ ſpeciei, ſeu denominationis, ut *ſeptem calami*, & *octo urnæ vini*. Porro numeri *heterogenei*, vel ſunt *reducibiles*, vel *irreducibiles*.

DEFINITIO IX.

22. Numeri heterogenei *reducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci poſſunt, ut *duo floreni*, & *quinque groſſi*; nam duo floreni (germanici) valent bis viginti, ſeu 40. *groſſos.*

DEFINITIO X.

23. Numeri heterogenei *irreducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci non poſſunt, ut *tres calami*, & *quinque urnæ vini.*

SCHOLION.

24. *Adverte; numeros heterogeneos ſecundum ſe* irreducibiles *poſſe fieri* reducibiles, *ſi in quodam* tertio *conveniant*, *ut* tres equi, *&* ſeptem urnæ vini, *ſi conſiderantur quoad pretia pecuniæ, erunt reducibiles in ratione pecuniæ.*

AXIOMATA.

25. I. *Totum* eſt æquale omnibus partibus ſimul ſumptis, & viciſſim.

26. II. *Totum* eſt majus ſua parte.

27. III. *Pars* eſt minor ſuo toto.

28. IV. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe.

SCHOLION.

29. *Axiomata hæc, quia lumine naturæ nota, demonſtratione non egent, ut adeo rigidiſſimi etiam Mathematum cultores ſuperfluitatis non immerito arguant factum* Cl. Chriſt. Wolffii, *qui hæc in ſuis Elementis Math. per propoſitiones identicas, nihilo ipſis axiomatibus clariores, demonſtravit.*

DEFINITIO XI.

30. *Additio numerica*, eſt collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum *totum*, quod totum *ſumma*, ſive *aggregatum*, aut *quæſitum* dicitur. Numeri vero colligendi vocantur *addendi*, aut *dati*.

COROLLARIUM.

31. Hinc ad additionem numerorum mixtorum requiritur homogeneitas numerorum.

PROBLEMA II.

32. PROP. *Additionem numericam facere*, ſive *addere numeros*.

RESOLUTIO.

I. Numeri addendi homogenei ita ſub ſe invicem collocentur inchoando à dextris ſiniſtram verſus, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c.

II. Sic collocati numeri ſubducantur linea, ne addendi confundantur cum ſumma.

III Inchoetur collectio à dextris, ſive ab unitatibus, & ſumma unitatum ſcribatur ſub linea directe infra unitates; eodem modo colligantur decades, & ſumma decadum ſcribatur infra decades, & ſic procedendum erit cum centenariis &c. *Vide exemplum I.*

IV. Quod si summa unitatum excrescat ultra numerum novem, seu in ejusmodi numerum, qui duabus notis scribendus foret, scribatur tantum illa, quæ alias ad dextram scribi deberet, altera vero nota mente retenta, addatur numeris sequentis classis decadum; idem observa in reliquis classibus. *Vide exempl. II. & III.*

V. Si addendi sint *heterogenei reducibiles*, E. gr. floreni, grossi, cruciferi ad flor. gros. & crucif. collocentur sub se invicem ita, ut crucif. respondeant cruciferis, grossi grossis, flor. florenis, & à minima specie inchoando, collectio inchoetur ut supra; hoc solum notato, quod, quoties summa speciei inferioris adæquat speciem superiorem, toties superiori speciei sit addenda. *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

33. Additio numerica est collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum totum (§. 30.) sed *per resolutionem hujus Probl.* in summa collecti habentur omnes numeri partiales & homogenei unitatum, decadum, centenariorum &c. ergo in summa habetur totum (§. 25.) ergo in summa facta habetur additio numerica Q. E. D.

Exem-

EXEMPL. I. REG. III.

Addendi	2	4	3	A
	5	2	6	B
Summa	7	6	9	C

EXEMP. II. REG. IV.

Addendi		6	5	8	A
		8	7	4	B
Summa	1	5	3	2	C

EXEMP. III. REG. IV.

Addendi		6	2	0	7	A
		9	0	0	8	B
Summa	1	5	2	1	5	C

EXEMP. IV. REG. V.

	flor. ger.	*groſſ.*	*crucif.*	
	15	14	2	A
	9	18	2	B
Sum.	25 *fl.*	13 *gr.*	1 *xr.*	C

SCHOLION I.

34. *In exemplo quarto in ſerie cruciferorum ſcriptus reperitur tantum unus crucifer, quia quatuor cruciferi faciunt unum groſſum & unum cruciferum, ideo tres crucif. ſeu* groſſus, *additus eſt claſſi groſſorum; item, quia ex claſſe groſſorum, addita ſumma emergit* 33. *groſſorum*, 20. *autem groſſi faciunt* florenum Ger. *unum, ideo ſcribendi tantum ſunt* 13. *groſſi*, & 20. *groſſi, ſeu* florenus *addendus claſſi florenorum, unde floreni emergunt* 25.

SCHOLION II.

35. *Eadem methodo adduntur quicunque alii numeri heterogenei reducibiles, ad quorum additionem prærequiritur notitia ſpecierum tam ſuperiorum, quam inferiorum in eodem genere. Sic ſi addendi ſint* centenarii, libræ, lothones, *noſſe debes, quod* 32. lothones *faciant* libram, 100. libræ, centenarium *&c. quorum notitia vel uſu, vel ex aliorum libris, cumprimis ex Cl.* Jo. Mich. Poetii *Arith. item* Caſp. Eiſenſchmidii Diſquiſit. Nova de Ponder. & Menſur. *comparanda erit, à quibus mutuatæ ſunt tabellæ reductionum aliquæ in* Parte III. *adducendæ.*

SCHOLION III.

36. Examen *rite peractæ additionis ſequenti capite IV. §. 44. ope ſubtractionis docebitur; nam reliquæ probæ omnes, puta per abjectionem 9 vel 7 ut vulgus Arithmeticorum docet, fallaces ſunt, & erroneæ,*

quæ

quæ fallacia cuivis ad oculum exhiberi potest, si vel sola permutatio loci fiat in numeris summæ. Præterea circa additionem bina monenda veniunt: primo: *si nimis longa series addendorum occurrat, tutius operatio instituetur, si in partes aliquot longa hæc series per lineas dispescatur, & singularum partium summæ particulares in unam summam totalem colligantur.* Secundo: *si sursum eundo additio facta est, repetatur eadem eundo deorsum, & si summæ congruant, probabile est, summam inventam non esse erroneam;* momoraliter certum, *si à duobus facta additio in summa conveniat.*

CAPUT IV.

De Subtractione Numerica.

DEFINITIO XII.

37. *Subtractio numerica* est totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel saltem totius æqualis ab æquali toto ablatio. Numerus minor dicitur *subtrahendus*, major *minuendus*, numerus, qui facta ablatione remanet, vocatur *residuum*, vel *differentia*.

COROLLARIUM I.

38. In subtractione itaque duæ tantum series numerorum requiruntur, una major, altera minor, vel saltem æquales.

COROLLARIUM II.

39. Quia subtractio est ablatio, sequitur numerum majorem, à minore non posse subtrahi, nisi minor augeatur saltem ad æqualitatem.

COROLLARIUM III.

40. Ad subtractionem quoque requiritur homogeneitas numerorum mixtorum.

PRO-

PROBLEMA III.

41. Prop. *Subtractionem numericam instituere, sive subtrahere numeros.*

Resolutio.

I. Collocetur numerus minor ſub majore ita, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus &c. quemadmodum in additione (§. 32.) dictum.

II. Sub hiſce numeris ducatur linea, ſicut in additione factum eſt.

III. Inchoetur ſubtractio à dextris ſiniſtram verſus, auferendo ſingillatim unitates minoris ab unitatibus majoris numeri, decades à decadibus &c. reſidua ſingula ſcribantur directe ſub linea infra illum numerum, cujus ſunt reſidua. *Vide exempl. I.*

IV. Si nota numerica inferior, ſeu ſubtrahenda, æqualis ſit ſuperiori, in loco reſidui ſcribatur zerus. (§. 10.) *Vide exempl. II.*

V. Si nota inferior major à ſuperiore minore, vel à zero veniat ſubtrahenda, aſſumatur in ſuperiore claſſe ex vicina eidem ſiniſteriore nota, una unitas, quæ unitas reipſa valet decem (§. 8.) & adjuncta numero minori, vel zero, fiat ſubtractio notæ inferioris à toto numero ſuperiore

jam

jam aucto una decade (§. 39.) numerus vero unitate mulctatus notetur puncto, quod in memoriam revocet, illum una unitate esse minorem. *Vide exempl. III.*

VI. Si in casu subtrahendæ notæ inferioris majoris à minore superiore, in loco numeri sinisterioris, unde concedenda esset unitas, reperiatur zerus, unitas hæc à numero proxime sequente zerum concedatur, quæ translata ad zerum cum illo facit 10, à quo jam aucto, unitas (quæ valet 10) iterum concedatur ad augendum numerum minorem superiorem. Notetur autem tam numerus unitate mulctatus, quam zerus puncto, ut intelligatur, zerum hujusmodi puncto notatum valere novem. *Vide exempl. IV.* Idem intelligendum, si in numero superiore plures zeri se ordine consequantur, hi enim transferendo concessam unitatem à numero illis proximo, omnes in novenarios mutantur. *Vide exempl. V.*

VII. Si zerus inferior à numero significante superiore veniat subtrahendus, pro residuo scribendus est superior. Si zerus à zero veniat subtrahendus scribatur in loco residui zerus. *Vide exemp. VI.*

VIII. Eædem regulæ servandæ sunt in subtractione heterogeneorum reducibilium, E. gr. flor. groß. crucif. inchoando sci-

ſcilicet ſubtractionem à ſpecie minima; hoc ſolum notato, quod in caſu conceſſionis Reg. V. & VI. conceſſa unitas à ſpecie majore, tot valeat unitates, quot ſpeciei minoris in illa continentur; E. gr. Si pro claſſe crucif. ex groſſis unus concedatur, hic valet tres unitates, ſeu cruciferos; ſi unus flor. germ. concedatur ad claſſem groſſorum, ille valet 20. unitates, ſeu groſſos. *Vide exempl. VII.* ſed & hæ Regulæ vivam vocem requirunt.

DEMONSTRATIO.

42. Subtractio numerica, eſt totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel totius æqualis à toto æquali ablatio (§. 37.) ſed *per reſolutionem hujus probl.* ſingulæ unitates minoris à ſingulis unitatibus majoris, decades à decadibus, &c. rite ablatæ ſunt, ergo facta eſt totius minoris numeri, & homogenei à toto majore ablatio, ergo facta ſubtractio numerica. Q. E. D.

PARADIGMA SUBTRACTIONIS.

EXEMP. I. REG. III.		EXEMP. II. REG. IV.	
A	8 7 9 4 5	A	2 7 8 4 2
B	5 5 4 3 2 *ſubtrah.*	B	3 8 1 2 *ſubtrah.*
Reſid.	3 2 5 1 3 C *ſeu different.*	*Reſid.*	2 4 0 3 0 C
Prob.	8 7 9 4 5 A	*Prob.*	2 7 8 4 2 A

RE-

EXEMP. III. REG. V.

	A	86.05.2
	B	23438 *subtrab.*
Resid.		62614 C
Proba		86052 A

EXEMP. IV. REG. VI.

	A	8.0.65.0.34
	B	4582482 *subtr.*
Resid.		3482552 C
Proba		8065034 A

EXEMP. V. REG. VI.

	A	7.0.0.4.0.0.3
	B	5423658 *subtr.*
Resid.		1580345 C
Proba		7004003 A

EXEMP. VI. REG. VII.

	A	9075
	B	4002 *subtrab.*
Resid.		5073 C
Proba		9075 A

EXEMP. VII. REG. VIII.

	flor.	*groff.*	*crucif.*
A	24	12	1
B	13	18	2 *subtr.*
Resid.	10	13	2 C
Proba	24	12	1 A

COROLLARIUM I.

43. Hinc proba *subtractionis* fit per *additionem*, si scilicet (ut factum est in omnibus exemplis) *subtrahendus* B addatur *residuo* C, prodire debet A, seu is numerus, à quo subtractum est; nam *residuum* C, tanquam *totum* continet omnes differentias unitatum, decadum &c. numeri majoris, & *subtrahendus* B continet pariter omnes partes subtractas unitatum, decadum &c. ejusdem numeri majoris (§. 41.) ergo *residuum* cum *subtrahendo* continet omnes partes numeri majoris, à quo *subtractio* facta est, ergo additæ adæquant numerum majorem (§. 25.)

CO-

COROLLARIUM II.

44. Examen itaque, seu proba additionis, quæ sit erroris, & fallaciæ expers, instituetur ope *subtractionis*: si enim in adducto (§. 33.) additionis exemplo I. hoc: à summa C subtrahatur numerus B, *qui est pars una summæ*, relinqui debet A numerus, *Pars altera* videlicet *summæ* C; si vero à summa C subtrahatur numerus A, relinqui debet numerus B. Eodem modo examen instituetur per reliqua additionis exempla superius adducta.

	A 243
	B 526
Sūma	769 C
Subtr.	526 B
Resid.	243 A

SCHOLION.

45. *In idem recidit praxis quorundam Arithmeticorum, qui in casu* Reg. V. & VI. (§. 32.) *adducto, dum nota major inferior, à minore superiore, vel à zero subtrahenda venit, unitatem concedendam non in serie superiore, sed in inferiore, à vicina nota mutuantur, eamque puncto notatam, una unitate non imminutam, sed auctam intelligunt.* E. gr. in exempl. III. Reg. V. (§. 42.) *adducto sic operantur:* 8 à 2 subtrahi non potest, igitur concedo à vicino 3 unum, (id est, decem) & puncto signo, dicoque 8 à 12 auferendo manent 4. Deinde procedendo ad sequentem notam 3 puncto signatam, dico 4 (non 3) à 5 manet 1. porro 4 à 0 subtrahi non potest, ergo concedo à vicino 3, unum, & puncto signo, ajoque 4 à 10 auferendo manent 6. Deinde propter numerum 3 puncto signatum, dico 4 à 6 manent 2, & denique 2 ab 8 manent 6. *Quæ praxis etsi erroris expers sit, nostram tamen* (§. 41.) *traditam, huic præferendam esse, facilitas operandi, maxime cum zeri complures occurrunt, edocet.*

	8 6 0 5 2 A
Subtr.	2 3.4 3.8 B
Resid.	6 2 6 1 4 C

CAPUT V.

De Multiplicatione Numerica.

DEFINITIO XIII.

46. *Multiplicatio numerica* eſt dati alicujus numeri toties ad ſeipſum facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet. E. gr. *Multiplicatio numeri* 6 per numerum 3, eſt numerum 6 ter ſumptum (tres enim unitates continet numerus 3) ſibimet addere; nempe: 6, & 6, & 6 faciunt 18.

DEFINITIO XIV.

47. Numeri dati inter ſe multiplicandi vocantur *factores*, vel *efficientes*. Sic in exemplo (§. 46.) *factores* ſunt: 6 & 3, horum primus vocatur *multiplicandus*, ſecundus, *multiplicans*, vel *multiplicator*, & viciſſim. *Iterata* vero hujusmodi *additio*, vocatur *ductus* unius numeri in alterum. Summa ex *ductu* reſultans, vocatur *factum*, aut *productum*, ut in dato exemplo: ſumma 18 vocatur *factum*, ex *factoribus* 6 & 3 in ſe ductis, reſultans.

COROLLARIUM.

48. Hinc *multiplicare*, eſt ducere unum *factorem* in alterum *factorem*, ut inveniatur *factum*, in quo unus *factorum* toties contineatur, quot unitates habet alter *factor*. Sic in *facto* 18. *factor* 6 continetur ter, quia alter *factor* 3, continet tres unitates.

THE-

THEOREMA I.

49. PROP. *Quando duo numeri invicem multiplicantur, idem factum prodire debet, sive primus in secundum, sive secundus in primum ducatur.*

DEMONSTRATIO.

Resolvantur *factores* E. gr. 6 & 3 in suas unitates, & eo ordine collocentur, quem figura exhibet:

	1 1 1 1 1 1
3	1 1 1 1 1 1
	1 1 1 1 1 1
	6

Jam in hac figura, seu sex unitates per tres lineas scriptas, seu tres unitates deorsum per sex lineas scriptas computes, idem numerus 18 prodibit, ut patet ad oculum; igitur seu 3 *multiplicentur* per 6, seu numerus 6 multiplicetur per 3, idem factum producunt. Q. E. D.

SCHOLION.

50. *Quia tyrones difficultatem magnam sentiunt in actuali multiplicatione, inveniendi facta particularia singularum notarum in singulas ductarum*, E. gr. *si quærant* factum *ex* 9 *in* 7, *seu septies novem quot sunt? idcirco ex binis adminiculis alterutrum illis discendum erit, vel Reg.* Pigri, *quæ oretenus docebitur, vel* Tabula Pythagorica *semper ante oculos habenda, cujus constructionem, & usum sequentia Problemata edocent.*

PROBLEMA IV.

51. PROP. *Tabulam Pythagoricam construere.*

RESOLUTIO.

Fiant cellulæ quadratæ tot, quot ſequens figura exhibet, & ordine eodem.

TABULA PYTHAGORICA.

	M	*b*								
a	1	2	*b*							
a	2	4	3	*b*						
a	3	6	9	4	*b*					
a	4	8	12	16	5	*b*				
a	5	10	15	20	25	6	*b*			
a	6	12	18	24	30	36	7	*b*		
a	7	14	21	28	35	42	49	8	*b*	
a	8	16	24	32	40	48	56	64	9	K
a	9	18	27	36	45	54	63	72	81	*b*
	N	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	

Videlicet I. ordo primus *a b* habeat duas cellulas, ſecundus *a b* tres, tertius *a b* quatuor &c. in primis novem cellulis M, N, ex parte ſiniſtra ſcribantur ordine deorſum 1, 2, 3 &c. usque ad 9.

II. Eodem modo in octo cellulis lineæ M, K, ad dextram, deorſum progrediendo, ſcribantur numeri 2, 3, 4 &c. usque ad 9.

III. In-

III. Inſcribantur facta particularia, quæ fiunt per ſolam additionem (vide cellulas *b d*) in prima ad ſiniſtram ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 2, ut *factum* habeatur in ſequente ejuſdem ſeriei cellula inſcribendum, addantur 2 ad 2 & ſumma 4 inſcribatur cellulæ ſecundæ, ſeriei *b d*; huic numero 4 addatur iterum ſupremus numerus 2, erit ſumma 6, numerus tertiæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; huic numero 6 addatur iterum ſupremus 2, erit ſumma 8, numerus quartæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; & ſic addendo numerum 2 ad numerum 8, erit ſumma 10, numerus quintæ cellulæ; ad 10 addendo 2, erit ſumma 12, numerus ſextæ cellulæ; ad 12 addendo iterum 2, erit ſumma 14, numerus ſeptimæ cellulæ; ad 14 iterum addendo 2, erit ſumma 16, numerus octavæ cellulæ; ad 16 addendo iterum 2, erit ſumma 18, numerus nonæ ſeu ultimæ cellulæ, primæ ſeriei *b d*. Eodem modo operatio inſtituatur in ſecunda ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 3; pro numero itaque ſecundæ cellulæ, addatur numerus 3 ſibimet ipſi ter, id eſt 3 & 3 & 3 ſunt 9, pro numero tertiæ cellulæ, addatur numero 9 numerus 3, & ſumma 12 inſcribatur tertiæ cellulæ. Atque hac methodo progrediendum erit cum cæteris, donec omnes cellulæ in Tabula impleantur. PRO-

PROBLEMA V.

52. PROP. *Usus Tabulæ Pythagoricæ.*

RESOLUTIO.

Sint multiplicandi intra se 8 & 6. Igitur regula universalis esto: Numerum ex datis majorem *E. gr.* 8 quære in parte sinistra cellularum M, N, minorem 6 in dextra cellularum M, K, communis concursus dabit cellulam, in qua reperies numerum 48, seu *factum* ex 6 in 8; hæc regula continetur his versiculis memoria mandandis:

Lævâ majorem, *sed dextrâ quære* minorem,
Cellula communis, quod petis, illa dabit.

PROBLEMA VI.

53. PROP. *Numerum quemcunque per quemvis alium multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si multiplicans constet una nota numerica*

I. Scribatur numerus *multiplicandus*, & infra ejus dextimam notam scribatur *multiplicans*.

II. Subducantur lineâ.

III. Inchoando à dextris per *multiplicantem*, multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* ope Tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ pigri.

IV.

IV. *Producta* ſingula ſcribantur infra lineam inchoando à dextris ſiniſtram verſus.

V. Si productum ex *multiplicante* in aliquam notam *multiplicandi* excreſcat ultra novem, ſeu in ejusmodi numerum, qui duabis notis ſcribendus foret, ſcribatur tantum nota dextima (*ut in additione dictum*) & altera ſiniſtima mente retenta, addatur producto novo, orto ex multiplicatione notæ ſequentis. *Vide exempl. I.*

CASUS II. *Si multiplicans conſtet duabus, vel pluribus notis.*

I. Scribatur *multiplicans* infra *multiplicandum* à dextris ſiniſtram verſus, ita, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. reſpondeant. Quemadmodum in additione (§. 32.) dictum.

II. Subducantur lineâ.

III. Inchoando à dextris ſiniſtram verſus per dextimam *multiplicantis* notam, multiplicentur (*ope tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ Pigri*) omnes notæ *multiplicandi*, & infra lineam ſcribantur, ut in caſu I. dictum.

IV. Eodem modo; per ſecundam *multiplicantis* notam multiplicentur omnes notæ *multiplicandi*, ut prius, id ſolum notetur: quod initium ſcribendorum productorum fieri debeat ſub ſecunda nota *multiplicantis*.

V. Peracta multiplicatione, addantur facta partialia in unam summam, ut habeatur totum productum. *Vide exemplum II.*

VI. Et universaliter: *si multiplicans* contineat plures notas; multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* per singulas notas *multiplicantis*, à dextris sinistram versus, producta vero scribantur infra lineam ea lege, ut initium scribendi fiat semper infra eam notam *multiplicantis*, per quam multiplicatio inchoatur, & facta partialia in unam summam addita, dabunt productum totale. *Vide exempl. III.*

DEMONSTRATIO.

54. *Multiplicandus* in facto toties per datas regulas sibimet ipsi additus est, quot unitates habet *multiplicans*, ergo *multiplicandus* toties continetur in facto, quot unitates habet *multiplicans* (§. 48.) igitur per has regulas factum est, quod petebatur. Q. E. D.

PARADIGMA MULTIPLICATIONIS.

EXEMP. I. CASUS I.

Factores	*Multiplicandus*	68473
	Multiplicans	2
	Factum	136946

EXEMP. II. CASUS II.

Fact.	*Multipl.*	875464
	Multipl.	36
Facta Partialia		5252784
		2626392
Factum		31516704

Ex-

EXEMPLUM III. CASUS II. REGULA VI.

	43756	*multiplicandus*	*Factores.*
	9284	*multiplicans*	
Facta partialia	175024		
	350048		
	87512		
	393804		
	406230704	*factum totale.*	

COROLLARIUM I.

55. Eodem modo peragitur multiplicatio numerorum *mixtorum heterogeneorum reducibilium*, modo vel ad speciem minimam prius reducantur, vel si prius non reducuntur, tunc, si factum inferioris speciei adæquet speciem superiorem, factum speciei inferioris ad productum speciei superioris addendum sit. *E. gr.* Sint multiplicandi 5 fl. germ. 13 gr. 2 cruc. per numerum 4, erunt reducti (per Tab. in Parte III. pecuniæ germ.) ad crucif. 341, qui per 4 multiplicati dant factum 1364 crucif. si vero non reducantur, operatio sic absolvetur, ut appositum exemplum docet.

flor.	*groß.*	*cruç.*
5	13	2
		4
22 *fl.*	14 *gr.*	2 *xr.*

COROLLARIUM II.

56. Si in fine unius factoris, vel utriusque simul, occurrant *zeri*, multiplicatio instituitur tantum per notas significantes, & in fine producti totalis adscribuntur tot *zeri*, quot erant in fine factorum. Si vero in loco intermedio *multiplicántis* occurant *zeri*, omissis iis, multiplicatio peragitur per significantes, servata tamen Reg. IV. & VI. Casus II. ut servetur ordo subscribendi facta partialia.

COROLLARIUM III.

57. *Examen* rite peractæ multiplicationis fit per divisionem *cap. sequenti* docendam: si nempe factum totale dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum.

CAPUT VI.

De Divisione Numerica.

DEFINITIO XV.

58. *Divisio numerica* est numeri minoris à majore toties facta subtractio, quoties minor in majore continetur. E. gr. *Divisio numeri 6 per numerum 3, est numerum 3 bis subtrahere à numero 6, quia numerus 3 bis in numero 6 continetur.*

DEFINITIO XVI.

59. Numerus major vocatur *dividendus*, minor appellatur *divisor*; numerus indicans quoties minor in majore continetur, vocatur *quotus*, vel *quotiens*; ut in dato supra exemplo: numerus 6 est *dividendus*, numerus 3 est *divisor*, numerus 2 indicans quoties 3 in 6 continetur, est *quotus*, vel *quotiens*.

COROLLARIUM I.

60. Itaque *dividere*, est quærere numerum (*quotum*) qui indicet quoties numerus minor (*divisor*) continetur in majore (seu *dividendo*); & hinc signum recte inventi *quoti* est, si *divisor* toties contineatur in *dividendo*, quoties *unitas* in *quoto*.

CO-

COROLLARIUM II.

61. Cum *quotus* indicet numerum, quoties minor à majore subtractus sit (§. 58.), si numerus minor, seu *divisor* multiplicetur per *quotum*, id est, toties sibimet ipsi addatur, quot unitates habet *quotus* (§. 46. & 48.) debet *factum* restituere majorem, sive *dividendum*.

COROLLARIUM III.

62. Ex (§. 60.) constat, recte etiam definiri *divisionem*; quod sit *Partitio numeri majoris in tot partes, quot unitates continet minor*; *quotus* vero indicat unam hujusmodi partem. Hinc divisione utendum, dum totum aliquod in datas partes distribuendum, aut partiendum est. *E. gr.* Si 24 flor. in 8 homines æqualiter distribuendi sunt, per divisionem reperietur *quotus* 3 floreni, qui unam ex 8 partibus indicant partem, dandam singulis ex 8 hominibus. Patet quoque (ex §. 39.) cum divisio sit repetita unius numeri ab alio subtractio, *divisorem* debere esse minorem *dividendo*, vel saltem æqualem.

PROBLEMA VII.

63. PROP. *Usus Tabulæ Pythagoricæ* (§. 51.) *si divisor constet una nota numerica.*

RESOLUTIO.

In parte *dextra* tabulæ quæratur nota *divisoris*, & hac reperta descendendo in eadem serie exquiratur in aliqua cellularum *dividendus*, vel ei proxime minor numerus, & correspondens eidem cellulæ in serie *sinistima* numerus, erit quotus quæsitus.

ſitus. *E. gr.* Sit *dividendus* 32, per *diviſorem* 4; reperto in parte dextra numero 4, invenietur (deſcendendo in eadem ſerie) cellula numeri 32, cui correſpondens numerus 8 in ſerie *ſiniſtima*, erit *quotus* quæſitus; nam multiplicando diviſorem 4 per quotum 8, factum 32 reſtituit dividendum (§. 61.) *Idem uſus Tabulæ Pythagoricæ eſt*, ſi diviſor conſtet pluribus notis numericis. *Ut patet, ex regul. III. casûs II. Probl. ſequent.*

PROBLEMA VIII.

64. PROP. *Dividere numerum datum quemvis majorem per datum alium minorem.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si diviſor conſtet una nota numerica.*

I. Infra notam dividendi ſiniſtimam (ſi ea major ſit, quam nota diviſoris, aut ſaltem notæ diviſoris æqualis) ſubſcribatur diviſor. *Vide exempl. I.* Si vero nota ſiniſtima dividendi minor ſit, quam nota diviſoris, ſcribendus erit diviſor ſub ſecunda nota ſiniſtima *dividendi. Vide exemp. II.*

II. Formetur ad latus dextrum dividendi *lunula*, ſeu hoc (Signum, pro loco ſcribendi *quoti.*

III. Ope Tabulæ Pythagoricæ Methodo (§. 63.) tradita, inveſtigetur quoties di-

divisor contineatur in nota, vel notis dividendi suprascriptis divisori, & quotus inventus scribatur post lunulam.

IV. Per hunc quotum multiplicetur divisor, factum sive productum exacte scribatur sub nota, vel notis dividendi iisdem, cum quibus actu operatio exercetur.

V. Ducta linea infra hoc ipsum productum ex multiplicatione divisoris per quotum enatum, subtrahatur à nota, vel notis dividendi hoc productum, & si quid remanet ex subtractione, infra lineam ductam suo loco scribatur residuum.

VI. Deponatur sequens dividendi nota ad notam residui ex priori operatione relicti dextram versus; aut si nihil remansit, sola nota dividendi deponatur infra lineam ductam, cui denuo subscribatur divisor, nota vero in *dividendo* eadem, quæ deposita est, *commate* vel *virgula* signetur, ad evitandum errorem, ne secundo deponatur.

VII. Cum his notis iterum inquiratur *per regulam III.* in quotum, & quotus inventus scribatur post lunulam ad prioris quoti latus dextrum; deinde *per reg. IV. divisor* cum hoc recenter invento *quoto* multiplicatus, & subscriptus, subtrahatur *per regul. V.* quo facto iterum deponatur sequens ex dividendo nota, & operatio *per* re-

regulas III. IV. & V. repetatur cum residuis dividendi notis usque ad ultimam notam inclusive. *Vide exempl. I. & II.* Si quid ex subtractione ultima remanet, scribatur per modum *fractionis*, id est: ad partem dextram quoti ducatur lineola, supra quam scribatur numerus *residuus*, infra vero lineolam scribatur *divisor*. *Vide exempl. II.*

CASUS II. *Si divisor constet pluribus notis numericis.*

I. In subscribendo divisore infra dividendum servetur eadem *regula I. casus I.* attendendo scilicet ad sinistimam notam tum *dividendi*, tum *divisoris*.

II. Eodem modo observetur *reg. II. casus I.*

III. Inquiratur ope tabulæ Pythagoricæ (§.63.) quoties sinistima divisoris nota contineatur in sinistima, vel sinistimis dividendi notis, & quotus repertus scribatur post lunulam, ut in *reg. III. casus I. dictum.*

IV. Per hunc quotum multiplicentur *omnes notæ* divisoris, & videatur, an hoc productum non sit majus, quam notæ dividendi supra divisorem scripti; quod si majus reperiatur hoc productum, signum est, *quotum* esse magnum respectu totius divisoris, & hinc una, vel duabus unitatibus

bus minuendum, donec productum ex quoto in diviſorem, vel ſit æquale, vel proxime minus notis *dividendi.*

V. Subtrahatur hoc productum à notis dividendi ſupra ſcriptis diviſori (videatur deinde an reſiduum non ſit majus ipſo *diviſore*, tali enim caſu augendus eſſet quotus una, vel duabus unitatibus, cum ſignum ſit nimis parvi quoti) deinde ex dividendo deponatur ad reſiduum (ſi quod remanſit) una nota, ac ſubſcripto diviſore toto, iterum *per reg. III. & IV. hujus caſûs*, inquiratur in novum *quotum*, deinde *per reg. V.* ad inventum reſiduum deponatur iterum una nota *dividendi*; atque ſic procedatur usque ad ultimam notam dividendi *incluſive. Vide exemp. III.* Si quid ex ultima ſubtractione remanet ſcribatur per modum fractionis, ut in *reg. VII. caſûs I. dictum eſt.*

SCHOLION.

65. *Quod ſi in operatione* reg. VII. caſûs I. & reg. V. caſûs II. *reſiduum cum depoſita nota dividendi minus ſit, quam* diviſor, *ſcribatur poſt lunulam* zerus, *& ex dividendo adhuc una nota ad hoc reſiduum deponatur, quod ſi adhuc* diviſor *major eſſe deprehendatur, iterum ſcribendus erit* zerus *poſt lunulam, & deponenda adhuc una nota ex* dividendo, *donec reſiduum ſic auctum, majus ſit ipſo diviſore, vel ſaltem eidem æquale, ut dividi poſſit.* Vide exempl. IV. Secundo: *Diviſio heterogeneorum reducibilium eadem methodo exercetur, ſi prius ad ſpeciem minimam reducantur.* Vide Partem III.

DE-

DEMONSTRATIO.

66. CASUS I. Ex ipſa operatione per has regulas liquet; *quotum* inventum indicare quoties *diviſor* contineatur in ſingulis millenariis, centenariis, decadibus & unitatibus, hoc eſt, in toto *dividendo* (§. 25.) conſequenter unitas in *quoto* toties continetur, quoties *diviſor* in *dividendo* (§. 60.) ergo per has regulas recte peracta habetur diviſio. Q. E. D. *Eadem eſt demonſtratio caſûs II.*

PARADIGMA CASUS I.

EXEMPLUM I.

Poſitiones.		*quoti*
I. *Divid.*	5,6,9,4,6	28473
Diviſor	2	
fact. ſubt.	4	
II. *Divid.*	1 6 . . .	
Diviſor	2 . . .	
fact. ſubt.	1 6 . . .	
III. *Divid.*	- - 9 . .	
Diviſor	2 . .	
fact. ſubt.	8 . .	
IV. *Dividend.*	1 4 .	
Diviſor	2 .	
factum ſubt.	1 4 .	
V. *Dividend.*	- - 6	
Diviſor	2	
factum ſubtr.	6	
ultimum reſid.	0	

EXEMPLUM II.

Poſitiones.		*quoti*
I. *Divid.*	26,9,4,8	$8982\frac{2}{3}$
Diviſor	3 . . .	
fact. ſubt.	2 4 . . .	
II. *Divid.*	2 9 . .	
Diviſor	3 . .	
fact. ſubt.	2 7 . .	
III. *Divid.*	2 4 .	
Diviſor	3 .	
fact. ſubt.	2 4 .	
IV. *Divid.*	- - 8	
Diviſor	3	
fact. ſubt.	6	
Reſiduum ultim.	2	

PA-

PARADIGMA CASUS II.

EXEMPLUM III.

I. *Divid.*	1 3 8 9,3,8,	*quoti* 547
Divisor	2 5 4 . .	
fact. sub.	1 2 7 0 . .	
II. *Divid.*	1 1 9 3 .	
Divisor	2 5 4 .	
fact. sub.	1 0 1 6 .	
III. *Divid.*	1 7 7 8	
Divisor	2 5 4	
fact. subtr.	1 7 7 8	
Resid. ultim.	0 0 0 0	

EXEMPLUM IV.

I. *Divid.*	3 2 6 7,8,3,	*quoti* 602 $\frac{499}{542}$
Divisor	5 4 2 . .	
fact. sub.	3 2 5 2 . .	
II. *Divid.*	- - 1 5 8 .	
Divisor	5 4 2 .	
III. *Divid.*	1 5 8 3	
Divisor	5 4 2	
fact. subtr.	1 0 8 4	
Resid. ultim.	4 9 9	

SCHOLION I.

67. Examen *rite inventi quoti, seu bene peractæ divisionis est, si* quotus *multiplicatus per* divisorem, *&* *addito ad factum residuo (si quod superfuit) restituat exacte* dividendum (§. 61.) *hinc in* exemplo I. quotus 28473, *multiplicatus per* divisorem 2, *producit factum* 56946, *qui numerus idem est cum* dividendo. *Item in* exemplo II. quotus 8982 *multiplicatus per* divisorem 3, *facit* 26946, *& cum addito ex divisione residuo* 2, *facit* 26948, *qui erat* dividendus.

SCHOLION II.

68. *Methodum hanc nostram dividendi per positiones particulares, (ut exempla docent) præferendam esse modo dividendi, quem vulgus Arithmeticorum & adhibet, & tyrones suos edocet (in quo tyrones jubentur :* Residuas ex facta subtractione notas superscribere notis dividendi iis, à quibus remanent) *nemo non videt; præterquam enim, quod ex hujusmodi residuis turritim supra dividendum congestis, & per lituras commaculatis, confusio non levis, & hinc difficultas non exigua, præsertim tyronibus, inoperando oriatur, si operantem errare contingat, is errorem hunc, peracta divisione per examen (§. 67.) detectum, corrigere nequit,*

quit, nisi totam operationem non sine tædio repetat; è contra in nostra methodo, & confusio evitatur, unde error præsertim in quoto, non facile admittitur, & si admissus foret, in particulari sua positione illico reperitur, & denique demonstrativa divisionis natura (§.58.) *ad oculum patescit.* Placuit exempli gratia subjicere oculis tyronum *exemplum nostrum III.* in formam divisionis vulgaris redactum.

17
1197
138938 (54
25444
1270
25
1016
25
1778

SCHOLION III.

69. *Tyrones admonitos volo, sequentia* Corollaria *familiaria sibi reddant, in quibus, & erroris evitatio docetur, & compendia utilia ex regulis, & ex exemplis supra* (§.64, 65, & 66.) *traditis, deducuntur, & denique dubia in particularibus operationibus occurrentia resolvuntur.*

COROLLARIA.

Ad facilitandum Tyronibus usum divisionis
ex datis regulis, & exemplis deducta.

70. Ex contemplatione datorum supra exemplorum, liquet *primo*: tot notas habere *quotum totalem* peracta divisione tota, quot fuerunt positiones particulares divisoris, quas in adductis exemplis denotant numeri marginales I, II, III, &c. liquet *secundo*: tot quoque habere notas *quotum totalem*, quot notæ restant in *dividendo* (facta videlicet rite prima subscriptione divisoris) quibus nulla *divisoris* nota subscripta est, una cum adjuncta nota quoti emergendi ex prima subscriptione; sic in *exemplo I.* quotus totalis habet *quinque* notas, quot nempe fuerunt positiones particulares designatæ per I, II, III, IV, V. Et in *eodem exemplo I.* ex prima subscriptione *divisoris* 2. quatuor restant in dividendo notæ, quibus addita nota primæ positionis, simul efficiunt *quinque* notas, & tot etiam habet notas *quotus totalis.* 71. II.

71. II. In positionibus particularibus, *quotus particularis* nunquam potest esse major, quàm 9.

72. III. Quando in *casu II. problematis VIII.* inquiritur, quoties sinistima *divisoris* nota, in sinistima, vel sinistimis notis *dividendi* contineatur; videatur simul, an reliquæ notæ *divisoris*, toties etiam in sibi superscriptis notis *dividendi* contineantur. Facit hæc animadversio, ne *quotus particularis* justo major accipiatur. *Vide I. positionem exempli III. casûs II.* ubi in *dividendo*: 1389: *divisoris*: 254, nota sinistima 2, in 13 continetur quidem sexies, sed quia 5 in 8; & 4 in 9, non continetur sexies, ideo 2 in 13 non sexies, sed quinquies (ut, *prima nota quoti docet*) acceptum est.

73. IV. Si contingat *factum particulare* ex *quoto* in *divisorem* esse *majus*, quam *dividendum particularem*; signum est, *quotum particularem* esse justo *majorem* acceptum; atque adeo, una, vel duabus unitatibus *minuendum*; & per *minutum quotum* repetendam esse multiplicationem *divisoris*, donec factum subtrahendum, aut æquale sit *dividendo particulari*, aut *illo* proximè *minus*. *Vide reg. IV. casûs II.*

74. V. Si facta subtractione, ex dividendo particulari *residuum* maneat *majus*, quam *divisor*, signum est, *quotum particularem* esse *parvum*, adeoque *augendum* una, vel duabus unitatibus, & facta per *auctum quotum* multiplicatione *divisoris*, novum factum resultans esse subtrahendum *à dividendo*. *Vide reg. V. casûs II.*

75. VI. Si *divisor* habeat in fine *zeros*, possunt (compendii gratia) his ex *divisore* abscissis, rescindi etiam totidem notæ dextimæ in *dividendo*; & cum reliquis tam *dividendi*, quam *divisoris* notis, institui potest operatio; sed *notandum*:

dum : quod peracta tota divisione, abscissæ notæ dividendi, una cum ultimo residuo (si quod fuit) scribi debeant per modum fractionis, subscripto toto *divisore*, ut *monet Reg. VII. casûs I.* Sic, si *dividendus* foret 857,32: per *divisorem* 3,00; abscissis duobus zeris *divisoris*, & duabus ultimis notis *dividendi* 32, (ut adjecta commata notant) essent tantum *dividendi* 857, per *divisorem* 3, ex qua divisione *quotus totalis* emergit: $285 \frac{232}{300}$.

76. VII. Si tam *divisor*, quàm *dividendus* habeant in fine *zeros numero æquales*, iis utrinque simpliciter deletis, cum reliquis notis tantum operatio instituatur. Sic, si *dividendus* sit: 435,000, per *divisorem*: 24,000, abscissis utrimque *zeris tribus*, erit *dividendus*: 435, per *divisorem*: 24. *Hujus compendii ratio dabitur* in Algebra. *Secundo*: Si in fine *dividendi* plures sint *zeri*, quam in fine *divisoris*; tali casu, tot tantum in *dividendo*, quot in *divisore* deleri possunt, nec plures; ita, si *dividendus* foret: 8920,00, per *divisorém*: 356,00; abscissis utrinque *duobus zeris*, (nam tot in *divisore* reperiuntur) erit *dividendus*: 8920; per *divisorem*: 356. *Tertio*: Si *dividendus* habeat quidem *zeros in fine*, non item *divisor*; tali casu, nec in *dividendo*, nec in *divisore* quidquam rescindi potest. *Notandum*: in hoc corollario tantum agi de *zeris finalibus*, non verò de *intermediis*, seu positis inter notas significantes. Sic, si foret *dividendus*: 320024 per *divisorem*: 2003; integri permaneant, est necesse.

77. VIII. Sicut *unitas* non multiplicat, ita etiam *unitas* non dividit. Hinc, si *divisoris* nota sinistima sit 1, & reliqua notæ omnes sint *zeri*, peracta habebitur divisio, si ex *dividendo*

tot

tot notæ dextimæ abſcindantur (per §. 75.) quot ſunt *zeri* in *diviſore*, & *quotus* erit abſciſſæ illæ ſiniſtimæ notæ *dividendi*. Ex abſciſſis vero dextimis *dividendi* notis ſignificantibus fiat *fractio*. Sic, ſi *dividendus* foret: 367,245, per 1000; erit *quotus*: $367\frac{245}{1000}$

78. IX. Quotus particularis (in quo inveniendo tota conſiſtit difficultas *diviſionis*) facilè invenitur, ſi per *quotum particularem* circiter acceptum, multiplicentur *mentaliter* primæ ſiniſtimæ notæ diviſoris, & videatur, an ſumma reſultans non ſit major, quam ſupraſcriptæ *dividendi* notæ.

SCHOLION.

79. *Etſi plura ſuperſint diviſionis* compendia, & praxes, *has inſinuaſſe ſufficiat tyroni, ex quibus ad cætera facile datur gradus. Praxim tamen dividendi per ſolam ſubtractionem (quam primo loco docendi erat animus) ſubjungere placet, quæ uti definitionem* diviſionis *à nobis* (§. 58.) *datam, claram facit, ita, ſi per* diviſorem *ex multis notis numericis* compoſitum, *operatio occurrat, diviſionem, Methodo & facili, & certa, & admodum compendioſa per ſolam ſubtractionem abſolvit. Sit igitur;*

PROBLEMA IX.

80. PROP. *Diviſionem per iteratas ſubtractiones numeri minoris à majore abſolvere.*

CONSTRUCTIO TARIFFÆ.

Ante operationem; ex diviſore dato fac multipla omnia usque ad noncuplum; quæ hac ratione facile obtinentur per ſolam additionem; (*Vide Tariff. fol.40.*)

 I. Scri-

I. Scripto ad latus aliquod extra dividendum *divisore* A, (ut in *Tariffa positum vides*) ducatur ad latus dextrum hujus divisoris *linea* deorsum, post hanc lineam è regione *divisoris scribatur numerus 1.*

II. Multiplica divisorem per 2, vel (quod idem est) addatur ad seipsum divisor, & factum B scribatur infra eundem divisorem, è regione vero illius post lineam scribatur numerus 2.

III. Huic facto B addatur primus divisor A, & habebitur numerus C, cui post lineam respondeat numerus 3. Huic numero C addatur iterum divisor A, & habebitur numerus D, cui post lineam adscribatur 4. Huic numero D addatur iterum divisor A, & habebitur numerus E, cui post lineam correspondeat 5. Huic E addatur iterum divisor A, & obtinebitur numerus F, cui post lineam adscribatur 6. Huic numero F addatur iterum divisor A, & obtinebitur numerus G, cui post lineam respondeat 7. Huic numero G addatur iterum divisor A, & habebitur numerus H, cui post lineam adscribatur 8. Denique numero H additus divisor A, producit numerum I, cui post lineam respondeat 9. Multipla hæc eo ordine expressa, vocantur uno nomine: *Tariffa*.

RE-

RESOLUTIO.

I. Facta rite prima ſubſcriptione diviſoris infra dividendum, ut (§. 64.) dictum, videatur quinam numerus ex *Tariffa*, aut *æqualis*, aut proxime *minor* ſit omnibus notis dividendi ſupra diviſorem ſcriptis; quo reperto, ſubſcribatur is infra dividendi notas, numerus vero in *Tariffa* poſt lineam eidem numero reſpondens, in loco quoti ſcribatur; ut factum vides in *exemplo ſubjuncto in 1. poſitione ſub lit.* D.

II. Subſcriptus ex *Tariffa* numerus D, ſubtrahatur à dividendo, & ad reſiduum (ſi quod eſt) deponatur iterum una nota ex *dividendo.* ut (§. 64. reg. VI.) dictum. *Vide in exemplo ſubjecto* poſitionem II.

III. Videatur iterum, quisnam ex *Tariffa* numerus reſpondeat proxime *minor*, vel *æqualis* huic reſiduo aucto unâ notâ *dividendi*, & repertus, ſubſcribatur reſiduo aucto, ac ſubtrahatur; numerus vero in *Tariffa* poſt lineam eidem reſpondens, in loco quoti ſcribatur. Atque ſic procedendum erit in omnibus poſitionibus usque ad ultimam dividendi notam depoſitam. *Vide exemplum ſubjectum in numeris parvis exhibitum* in gratiam tyronum.

DEMONSTRATIO.

Constructio *Tariffæ*, seu multiplorum divisoris, patet ex (§.46.) resolutio vero liquet, ex (§.58. & 81.)

Exemplum divisionis ope subtractionis iteratæ factum.

TARIFFA.

	quoti
A — - 34	1 — k
B — - 68	2 — l
C — 102	3 — m
D — 136	4 — n
E — 170	5 — o
F — 204	6 — p
G — 238	7 — q
H — 272	8 — r
I — 306	9 — s

RESOLUTIO.

		n r o k l
I. *Dividend.*	16.4,9,4,0,8,	4 8 5 1 2
Divisor	34	
D *subtrah.*	136	
II. *Resid. auct.*	289 . . .	
H *Subtrah.*	272 . . .	
III. *Resid. auct.*	174 . .	
E *subtrah.*	170 . .	
IV. *Resid. auct.*	- 40 .	
A *subtrahend.*	- 34 .	
V. *Resid. auct.*	- - 68	
B *subtrahend.*	- - 68	
	00	

COROLLARIUM.

81. Hinc liquet I. divisionem numericam recte definitam esse (§.58.) quod sit *numeri minoris à majore toties facta subtractio, quoties minor in majore continetur.* II. Patet, per hanc dividendi methodum, certum semper obtineri quotum particularem. III. Liberum esse operantem a multiplicatione facienda. Et hinc IV. patet, fieri posse divisionem absque notitia regularum multiplicationis, & absque tabula Pythagorica, aut regula pigri, modo operans sciat *addere*, & *subtrahere*. V. Constat, si divisor sit admodum magnus, hac methodo operantem mul-

multo citius, & certius absolvere divisionem, quàm *methodo ordinaria* exercitatissimus etiam Arithmeticus persolvere queat.

SCHOLION.

82. *Hæc erant quæ summatim ad captum tyronum* (*omissis interea de natura numerorum theorematibus sublimioribus*) *tractanda censuimus; ex quibus apparet reipsa duabus tantum operationibus*, additione & subtractione *omnes Arithmeticæ Algorithmos absolvi, nec enim numerus alias mutationes subire potest, quam, vel ut fiat* major, (*quod fit* addendo) *vel* minor, *quod fit* subtrahendo. *Jam ordo postularet agendi de fractionibus vulgaribus, quas (quia hæ faciliore longe methodo in Algebra demonstrantur) ad calculum literalem reservamus, & harum loco in parte secunda hujus Arithmeticæ*, Logisticam Decimalem Geometricam *praxi Geometricæ, & Experimentis in Philosophia naturali tum instituendis, tum explicandis summe necessariam, exponemus.*

FINIS
PARTIS I.

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS II.

DE LOGISTICA DECIMALI, SEU *De quatuor Speciebus Arithmeticæ decimalis Geometrarum.*

Arithmetica decimalis Geometrarum, quam alii nomine *fractionum decimalium* appellant, à quibusdam in Geometria, cujus ope calculos ſuos Geometræ faciunt, ab aliis poſt doctrinam fractionum vulgarium tractanda ſuſcipitur. Nos ordinem doctrinæ naturalem ſectantes, eam nec Geometriæ permiſcendam (ne regulis Arithmeticæ filum Geometriæ rumpamus) nec ad doctrinam fractionum vulgarium rejiciendam putavimus, utpote, quæ nihil cum iis commune habet, præter inane, ac triſte tyronibus nomen *fractionis*, ſed abſolutis numerorum integrorum algorithmis, (cum Logiſtica decimalis iiſdem Arithmeticæ integrorum regulis utatur) tractandam hac parte ſuſcipimus.

CAPUT I.

Hypotheſes numerorum Decimalium.

HYPOTHESIS I.

83. QUemadmodum Geometræ, *ita* Philoſophi naturales *in determinandis ſuis magnitudinibus (ſeu eæ ſint* longitudinum *tantum, id*

id est, linearum; *seu* longitudinum *simul* & latitudinum, *id est*, arearum, & superficierum; *seu demum sint* longitudinum, latitudinum, & profunditatum, *id est*, corporum) *utuntur mensuris, quas vocant* perticas, pedes, digitos, lineas &c.

HYPOTHESIS II.

84. Pertica simplex (*considerando videlicet secundum longitudinem tantum*) *dividitur in* decem *partes, quas vocant Geometræ* pedes, & *hinc etiam* perticam *appellant*, decempedam; pedem unum *iterum dividunt in decem* digitos, & *hinc* decempeda *habet* 100 digitos. Digitum *porro subdividunt in decem* lineas, & *hinc* decempeda *habet* 1000. lineas, & *ita porro progrediuntur*.

COROLLARIUM I.

85. Hinc liquet species inferiores in *decempeda* per accrementum decadicum constituere species superiores; sic exempli gr. cum 10. *lineæ* faciant *digitum*, si numerus *linearum* excrescat ultra 9, ille transit in speciem *digitorum*; ita *digiti* accrescentes ultra 9, constituunt speciem *pedum*, idem est de *pedibus* respectu *perticarum*, seu *decempedarum*.

COROLLARIUM II.

86. Ex hoc accremento decadico liquet porro, non aliis regulis ad suas operationes egere *Logisticam decimalem*, quam quas dedimus in *parte I. de numeris integris vulgaribus*; nam & hi

ex

ex inſtitutione hominum accrementum habent decadicum. (ſ. 8.) Hinc in numero *Ex.gr.* iſto *Logiſtico ſimplici*: 5784, ſi ultima nota 4 denotet *lineas*, ſequens 8 denotabit *digitos*, illam vero conſequens 7, indicabit *pedes*, & numerus 5 ſignificabit *decempedas*, ſeu *perticas*. Intelligendo omnes ſpecies eſſe *ſimplices*.

HYPOTHESIS III.

87. Signa, *ſive* notæ, *aut* exponentes *harum ſpecierum ſunt ſequentia: ſignum* perticarum *eſt* (o) *ſeu zerus*. Pedum *eſt* (') *ſeu una virgula*. Digitorum ('') *ſeu duæ virgulæ*: Linearum (''') *ſeu tres virgulæ*. *Ponuntur hæc ſigna ſupra numeros ſibi cognomines*. Ex. gr. *Numerus Logiſticus decimalis iſte*: $\overset{o}{5}\overset{'}{7}\overset{''}{8}\overset{'''}{4}$ *aut ſimpliciter*: $578\overset{'''}{4}$ *in ultima nota notatus*, *ſic enunciandus eſt*: 5 decempedæ ſimplices, 7 pedes ſimplices, 8 digiti ſimplices, 4 lineæ ſimplices. *Quod ſi reſpectus habeatur tantum ad ultimum ſignum numeri* 4, *poteſt* (§. 84.) *etiam ſic enunciari: quinque millia ſeptingentæ octuaginta quatuor* lineæ ſimplices.

COROLLARIUM I.

88. Ratio *conjunctim* ſcribendi numeros Logiſticos decimales ſimplices, colligitur ex (ſ. 84. & ſeq.) ſic, ſi *conjunctim* ſcribendi forent *Ex.gr.* $\overset{o}{4}$ & $\overset{''}{6}$, ita ſcribentur $\overset{o}{4}\overset{'}{0}\overset{''}{6}$ (& non $\overset{o}{4}\overset{''}{6}$) quia locum deficientis intermediæ ſpeciei, nempe *pedum*, ſupplere debet *zerus*; quemadmodum etiam in numeris vulgaribus monuimus

(ſ.

(§. 10.) similiter si *conjunctim* scribendi sint $\overset{o}{8}$ & $\overset{///}{5}$, ita scribentur: $\overset{o}{8}\overset{/}{0}\overset{//}{0}\overset{///}{5}$ (non $\overset{o}{8}\overset{///}{5}$) quia loca *pedum* & *digitorum* intermediorum *zeris* supplenda sunt. (§. 84.)

COROLLARIUM II.

89. Liquet etiam (ex §. 84.) *simplices perticas* ad inferiorem quamvis speciem *simplicem* facile reduci per adjectionem tot *zerorum*, quot *virgulæ* datam speciem inferiorem denotant. *Ex. gr.* Sint $\overset{o}{7}$ reducendæ ad *digitos*, cum signum digitorum sint (//) *binæ virgulæ*, scribantur ad dextram numeri $\overset{o}{7}$ duo *zeri*, & habebuntur $\overset{o}{7}\overset{/}{0}\overset{//}{0}$ id est, septem *perticæ* ad speciem *digitorum* reductæ. Si vero species superior reducenda ad inferiorem jam signata habetur una, vel pluribus *virgulis*, tali casu; tot *zeri* ad dextram speciei superiori apponendi sunt, quot *virgulis* species data inferior superat *virgulas* speciei reducendæ. *Ex. gr.* sint reducendi $\overset{/}{8}$, ad *lineas*, cum virgulæ lineas designantes sint (///) tres, superant virgulam *pedum* reducendorum *duabus virgulis*, igitur ad $\overset{/}{8}$ apponendi sunt *duo zeri*, & erunt $\overset{/}{8}\overset{//}{0}\overset{///}{0}$ reducti. Sic $\overset{//}{5}$ ad *lineas* reducti sunt $\overset{//}{5}\overset{///}{0}$, & ita porro.

DEFINITIO I.

90. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. TAB.
quadratus (ob figuram) appellatur pro- LOG.
ductum, aut factum quod producitur, si Fig.
pertica simplex, vel *pes*, aut *digitus simplex* I.
perseipsum multiplicetur. *Ex. gr.* Si linea recta A B insistens alteri B C *æquali*, ad

neu-

neutrum latus declinando, repræsentet *perticam*, vel *pedem*, aut *digitum simplicem*, & hæc linea A B moveri concipiatur per omnia puncta alterius lineæ rectæ B C ipsi prorsus *æquali*, ita, ut relinquere vestigia sui intelligatur, spacium viæ A B C D postquam pervenit ad C, vocatur (ob figuram) *quadratum*, & quidem in specie: si linca A B erat pertica simplex, spacium A B C D vocatur *pertica qradrata*, si linea A B fuit pes simplex, appellatur *pes quadratus*, si linea A B fuit digitus, vocatur *digitus quadratus*. Hic ductus lineæ rectæ in lineam rectam *multiplicatio Geometrica*, Area vero, sive spacium A B C D, *productum Geometricum* appellatur.

COROLLARIUM I.

TAB. LOG. Fig. 2. 91. Hinc si pertica simplex concipiatur divisa in 10 pedes simplices, continebit *productum* perticæ quadratæ in pedes divisæ, 100 *pedes quadratos*; eodem modo: *pes quadratus* (si pes simplex in 10 digitos divisus concipiatur) 100 *digitos quadratos* continebit, & *digitus quadratus* in lineas divisus continebit 100 *lineas quadratas* &c. Igitur propter accrementum *centenariorum*, cum pertica simplex in *digitos* divisa contineat 100 *digitos* (§. 48.) ergo *pertica quadrata* continebit 100 *digitos* per 100 multiplicatos, id est, 10000 *digitos quadratos*, & cum pertica simplex divisa in *lineas* contineat 1000 *lineas* (§. 84.) continebit pertica quadrata in lineas divisa 1000 *lineas* per 1000 multiplicatas, id est 1000000 *lineas quadratas*.

Ne-

Notandum: *Signum* □ *loco vocis* quadratum *deinceps usurpandum.*

COROLLARIUM II.

92. Porro ex his productis □ patet *primo*: Ad hoc, ut lineæ □ efficere possint digitum □, debeat numerus *linearum* □ attingere *tres notas* numericas, id est, adæquare numerum 100; idem est, de *digitis* □, ut efficiant *pedem* □, & de *pedibus* □, ut efficiant *perticam* □. *Secundo*: Ut *lineæ* □ efficiant *pedem* □, debent hæ attingere *quinque notas* numericas, id est 10000, & ad hoc, ut *lineæ* □ efficiant *perticam* □, debent attingere *septem notas* numericas, id est 1000000. Unde patet ratio reducendi speciem superiorem ad inferiores species, per adjectionem bis tot zerorum, quot virgulas species inferior continet.

PROBLEMA I.

93. PROP. *Enunciare, & per virgulas exprimere numerum logisticum decimalem* □.

RESOLUTIO.

I. Propositus numerus □ in classes distinguatur, inchoando à nota designante speciem minimam, & cuilibet classi sinistram versus binæ notæ numericæ attribuantur, quod fit, si numeri propositi logistici, notæ numericæ (inchoando à virgulis speciei infimæ) *alternando* signentur virgulis sinistram versus numero decrescentibus. Sit numerus logisticus decimalis □

Ex.

///
Ex. gr. 24638470, erit inchoando à
///
nota numerica 7, *alternando signatus* per virgulas decreſcentes ſiniſtram verſus :
o / // ///
24,63,84,70. & ſic enunciatur : *viginti quatuor* perticæ □, *ſexaginta tres* pedes □, *octuaginta quatuor* digiti □, & *ſeptuaginta* lineæ □.

II. Si poſt numerum ſignatum virgulis ſpeciem minimam deſignantibus nulla ſequatur nota numerica, ſubintelligendus eſt in fine zerus. *E. g.* in hoc numero logiſti-
o / // // //
co □ : 32745, numerus ultimus 5 valet 50.

III. Numeros ſiniſtimos, id eſt, proxime ſequentes virgulam deſignantem ſpeciem pedum, omnes eſſe *perticarum*, quotcunque reperiantur, clarum eſt.

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 91. & 92.) Reg. III. conſtat, quia perticæ ſunt ſpecies maxima.

COROLLARIUM.

94. Ex hactenus dictis liquet ratio quoque *conjunctim* ſcribendi numeros logiſticos □ : ſic
o //
54 perticæ □, & 72 digiti □, ſcribentur *con-*
o / // o //
junctim : 5400 72 (non 5472) quia ſpeciei omiſſæ *pedum* locus ſuppleri debet duobus zeris

(§. 91.

(§.91.92,93.) ita 32 perticæ $\overset{o}{\square}$, & 45 lineæ $\overset{///}{\square}$,

conjunctim scribentur: $\overset{o}{3}\overset{/}{2}\overset{//}{0}\overset{///}{0}\overset{o}{0}0\overset{///}{45}$ (non 3245) ut patet ex (§. 92. & 93.)

HYPOTHESIS IV.

95. *Geometræ utuntur perticis, pedibus, digitis &c.* □, *in determinandis magnitudinibus arearum, seu superficierum, idque ex institutione hominum.*

SCHOLION.

96. *Mirari non debent tyrones (dum aliorum Authorum regulas tractandi numeros logisticos decimales legerint) nos à Methodo vulgari recessisse; experientur enim Methodum hanc nostram non modo intellectu faciliorem, sed usu ipso etiam longe præstantiorem. Præterquam enim, (ut patebit inferius) quod juxta regulas vulgares dispescendi in classes numeros logisticos* □, *non levis è virgularum heterogeneitate oriatur perturbatio, eas etiam universales non esse demonstrabitur. Accedit, quod virgularum eâdem signaturâ adhibitâ, discrimen non indicetur, inter numerum logisticum simplicem, & inter numerum logisticum quadratum, aut cubicum perticarum, pedum &c. Quod in nostra Methodo, vel primo virgularum dispositarum intuitu illicò patescit.*

DEFINITIO II.

97. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. *cubicus* (ob figuram) appellatur *productum*, quod oritur, si pertica □ per perticam *simplicem*, aut pes □ per *pedem simplicem*, item digitus □ per digitum *simplicem* &c. multiplicetur. *Ex. gr.* Si quadratum ABCD, repræsentans *perticam*, vel *pedem*, TAB. LOG. Fig. 4.

aut *digitum* □ &c. moveri concipiatur directe deorsum per lineam A E *æqualem perticæ*, vel *pedi*, aut *digito simplici* &c. ita, ut intelligatur hoc □ motum, per singula puncta lineæ B E, relinquere sui vestigia, spacium A B C D E H K F (per modum corporis consideratum) per quod □ moveri concipitur, vocatur *cubus*; & quidem in specie: si moveatur pertica □ per perticam *simplicem*, dicitur *pertica cubica*; si pes □ per pedem *simplicem*, *pes cubicus*; si digitus □ per digitum *simplicem*, *digitus cubicus* appellatur &c.

COROLLARIUM I.

98. Quoniam pertica □ in pedes divisa continet 100 pedes □; & pes □, 100 digitos □; digitus □, 100 lineas □ &c. (§. 91.) si pertica □ A B D. moveri intelligatur deorsum per perticam *simplicem* B E divisam in 10 pedes, continebit *pertica cubica* pedes *cubicos* 1000, quod est *productum*, si 100 per 10 multiplicetur. Ex eadem ratione, pes *cubicus* numerabit 1000 digitos cubicos, & *digitus cubicus* censebit 1000 lineas cubicas, per accrementum videlicet *millenariorum*, ut patet ex fig. 5.

TAB. LOG. Fig. 5.

COROLLARIUM II.

99. Præterea liquet; cum pertica □ in digitos divisa numeret 10000 digitos □ (§. 91.) & pertica simplex 100 digitos *simplices* (§. 84.) sequitur perticam cubicam in digitos divisam continere 1000000 *digitorum cubicorum*; nam 10000 per 100 multiplicata producunt 1000000; item cum pertica □ in lineas divisa contineat 1000000 *linearum* □ (§. 91.) & pertica *simplex*

in

in lineas divisa 1000 *lineas simplices* (§. 84.) sequitur perticam cubicam in lineas divisam continere 1000000000 *linearum cubicarum*; nam 1000000 per 1000 multiplicatum, producit factum 1000000000.

COROLLARIUM III.

100. Contemplando producta cubica ex multiplicatione quadratorum in species *simplices* orta, certum est, *primo*: ad hoc, ut lineæ cubicæ efficere possint unum digitum cubicum, eæ adæquare debeant numerum 1000, adeoque superare *tres notas* numericas; idem est, de digitis cubicis respectu habito ad pedem cubicum, & de pedibus cubicis relate ad perticam cubicam. (§. 98.) *Secundo*: Ut lineæ cubicæ adæquent pedem cubicum, necesse est, ut assurgant ad numerum 1000000, seu *septem notarum*; & ut eædem lineæ cubicæ adæquent perticam cubicam, attingere debent numerum 1000000000, seu *decem notarum*.

PROBLEMA II.

101. PROP. *Exprimere per virgulas, & enunciare datum numerum logisticum decimalem cubicum.*

RESOLUTIO.

I. Propositus numerus logisticus cubicus in classes distinguatur inchoando à nota designante speciem infimam, & cuilibet classi, sinistram versus, *tres notæ* numericæ assignentur, quod fit, si signentur singulæ *ternæ notæ*, à minima incipiendo, virgulis numero decrescentibus. *Ex. gr.* Sit numerus logisticus cubicus signandus:

///
5 6 7 8 3 2 9 4 5 3, erit per virgulas in qua-
° / // ///
libet *tertia nota* signatus: 5,6 7 8,3 2 9,4 5 3, & ita enunciatur: *quinque* perticæ cubicæ, *sexcenti septuaginta octo* pedes cubici, *trecenti viginti novem* digiti cubici, *quadringentæ quinquaginta tres* lineæ cubicæ.

II. Si post numerum speciei minimæ per virgulas designatum, non reperiantur notæ numericæ, subintelligi debent duo
° / // ///
zeri apponendi, sic: 8 3 4 5 2 6 8 7 nume-
/// ///
rus ultimus 7, valet 700 lineas cubicas; si vero una nota numerica sequatur, subintelligi adhuc debet unus zerus. *Ex.gr.*
° / // // //
4 8 9 4 3 5, ultimi 3 5, valent 3 5 0 digitos cubicos. (§. 100.)

III. Post virgulam pedum cubicorum sinistram versus positi numeri (quotcunque sint) designant perticas cubicas.

Demonstr. liquet, ex (§. 98. & sequ.)

COROLLARIUM.

102. Ex hactenus explicatis liquet quoque ratio *conjunctim* scribendi numeros logisticos cubicos, sic:
° //
24 perticæ cubicæ, & 329 digiti cubici *conjunctim*
° / // °//
scribenrur: 24000329 (§. 100.) & non (24329) propter defectum speciei intermediæ pedum
°
cubicorum; ita quoque scribentur: 3 cubicæ, &
/// ° / // ///
250 cubicæ, videlicet: 3000000250 (& non 3250)

$\overset{0///}{3250}$) ob eandem rationem; sic pariter $\overset{0}{8}$ cubicæ, $\overset{/}{682}$ cubici, & $\overset{///}{3}$ cubicæ, scribentur hoc modo: $\overset{0}{8}\overset{/}{682}\overset{//}{000}\overset{///}{003}$. per (§. 99. & 100.)

SCHOLION.

103. *Tyro in his Hypothesibus logisticorum decimalium intelligendis studium ponat, ac exercitium, quibus memoria retenti praxim quatuor sequentium specierum Arithmeticarum sine difficultate imbibet, ac subinde tam in Geometria practica, quàm Philosophia naturali, eas absque errandi timore usurpabit.*

CAPUT II.

De Additione numerorum logisticorum decimalium.

DEFINITIO III.

104. Numeri logistici decimales *diversæ denominationis* dicuntur, qui sub eodem genere non comprehenduntur, etsi in specie conveniant, *Ex. gr. perticæ simplices*, & *perticæ* □, aut *perticæ cubicæ* &c. *Ejusdem* vero *denominationis* sunt, qui in eodem genere conveniunt, etsi specie differant. *Ex. gr. Perticæ simplices*, & *pedes simplices*. Item *perticæ* □, & *pedes* □, aut *perticæ cubicæ*, & *digiti cubici*.

DEFINITIO IV.

105. Numeri logistici decimales *diversæ speciei* dicuntur, qui in tota specie differunt, etsi in genere conveniant. *Ex.*

gr. perticæ simplices, & *pedes simplices*, qui conveniunt in eo, quod sint *quantitates simplices*, seu *longitudines*, differunt vero in eo, quod pertica sit longitudo aliter mensurabilis, quam pes.

DEFINITIO V.

106. Numeri logistici decimales, & ejusdem *speciei*, & ejusdem *denominationis* vocantur, qui & in eadem specie, & in eodem genere conveniunt. *Ex. gr.* 9 perticæ simplices, & 5 perticæ simplices. Item ejusdem denominationis, & speciei sunt 3 perticæ □, & 4 perticæ □ &c.

DEFINITIO VI.

107. Numeri logistici decimales, & *diversæ denominationis*, & simul *diversæ speciei* dicuntur, qui tam in genere, quam in specie inter se differunt. *Ex. gr. Perticæ simplices*, & *digiti quadrati*; aut *digiti* □, & *pedes cubici*.

THEOREMA I.

108. PROP. *Quæ adduntur sibi invicem, aut ab se invicem subtrahuntur, illa ejusdem & speciei, & denominationis esse debent.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. inter ea, quæ addi, aut subtrahi debent, requiritur homogeneitas

(§.

(§. 30. & 31. item §. 37. & 40.) ergo ejusdem ſpeciei eſſe debent. (§. 20.)

Demonſtratur Pars altera. Ea, quæ adduntur, aut ſubtrahuntur, in eadem ſpecie conveniant oportet, (per Partem I. hujus) ergo multò magis neceſſe eſt, ut in genere conveniant, id eſt, ut ſint ejusdem *denominationis.* (§. 106.) Q. E. D.

PROBLEMA III.

109. PROP. *Addere numeros logiſticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Ex diſpoſitione virgularum videatur, cujusnam ſint denominationis dati numeri addendi, an ſint logiſtici *ſimplices?* an *quadrati?* an *cubici?* &c.

II. Si numeri logiſtici ſint, & ejusdem *denominationis*, & *ſpeciei*, ij, ita ſub ſe invicem collocentur, ut lineæ lineis, digiti digitis, pedes pedibus, &c. reſpondeant.

III. Si in addendis ſpecies una, vel plures (ſive eæ ſint intermediæ, ſive finales) deficiant, ſuppleantur zeris; in ſimplicibus quidem juxta doctrinam. (§. 88. & 89.) In quadratis juxta doctrinam. (§. 91. 92. & 94.) In cubicis juxta (§. 99. 100. item 102.) *Vide exempl. II. & III.*

IV. Ita collocati, addantur invicem

juxta regulas Arithmeticæ integrorum (§. 32.) traditas.

V. Superſcriptio virgularum in ſumma, relate ad ſpeciem infimam, manet eadem, quæ fuit in addendis, à qua (ſpecie infima) reliquarum notationes juxta doctrinam (§. 87. & 88.) item (§. 93. & 101.) dependent.

DEMONSTRATIO.

Per datas regulas, tam in logiſticis ſimplicibus, quam quadratis, & cubicis, habentur in ſumma ſingulæ ſpecies, ſed etiam per datas regulas in ſumma habentur ſingularum ſpecierum unitates, decades, centenarii &c. (§. 84. 92. 99.) ergo in ſumma habetur *totum* omnium datorum logiſticorum. Q. E. D.

PARADIGMA I.

Additionis logiſticorum ſimplicium.

EXEMP. I. REG. II.

	o	/	//	///	
Addendi	8	9	5	2	A
	7	4	3	6	B
Summa	16	3	8	8	C

EXEMP. II. REG. III.

Si ad 567 (o / //) *add. ſint* 3 & 2 (o //) *erunt*

	o	/	//		
Add.	5	6	7	A	
	3	0	2	B	*completus* (§. 88.)
Sum.	8	6	9	C	

Ex-

EXEMP. III. REG. III.

/ 0 / // ///
Si adden. sint 2 *ad* 4 5 3 8
erunt

0 / // ///
Addendi { 4 5 3 8 A
/ // ///
2 0 0 B *re-duct.*

0 / // ///
Summa 4 7 3 8 C

EXEMP. IV. REG. V.

/ // ///
Addendi { 8 3 7 A
/ // ///
9 8 9 B

0 / // ///
Summa 1 8 2 6 C

PARADIGMA II.

Additionis logisticorum □

EXEMP. I. REG. II.

0 / // ///
Add. { 4 3 4 2 5 3 6 A
0 / // ///
7 9 6 7 9 5 8 B

0 / // ///
Sum. 1 2,3 1,0 4,9 4 C

EXEMP. II. REG. III.

0 / // 0 //
Si ad 53426 *sint add.* 5 & 60
erunt

0 / //
Add. { 5 3 4 2 6 A
0 / //
5 0 0 6 0 B *comple-tus* (§. 94.)

0 / //
Sum. 1 0,3 4,8 6 C

EXEMPLUM III. REGULA III. & V.

/ / // ///
Si addendi sint 7 2 *ad* 8 9 6 7 0 5
erunt

/ // ///
Addendi { 8 9 6 7 0 5 A
/ // ///
7 2 0 0 0 0 B *reductus.* (§. 94.)

0 / // ///
Summa 1,6 1,6 7,0 5 C

PARADIGMA III.

Additionis logisticorum cubicorum.

EXEMPLUM I. REG. II.

Addendi	° ' ''	
	4,889,785	A
	° ' ''	
	9,798,907	B
	° ' ''	
Summa	14,688,692	C

EXEMPLUM II. REGULA III. & V.

° ''' ° ' '' '''

Si sint addendi 3 & 25 *ad* 8,273,845,002

erunt

Addendi	° ' '' '''	
	8,273,845,002	A
	° ' '' '''	
	3,000,000,250	B *completi.*
	° ' '' '''	
Summa	11,273,845,252	C

SCHOLION I.

110. Examen, *sive proba additionis*, *fit per subtractionem*, *ut* (§. 44.) *monuimus*, & *cap. sequ. docebitur.*

SCHOLION II.

111. Regula III. *iis*, *qui frequenti exercitio praxim imbiberunt*, *opus non esse*, *ex contemplatione horum exemplorum liquet*, *modo animadvertant ad* regulam II. *in subscriptione logisticorum*; *in usum tamen tyronum*, *donec praxi asuescant*, *non inutilem censuimus.*

CA-

CAPUT III.

De ſubtractione logiſticorum decimalium.

PROBLEMA IV.

112. PROP. *Subtrahere numerum logiſticum decimalem minorem à majore.*

RESOLUTIO.

I. obſerventur ex (§. 109.) *Reg. I. II. & III.* deinde fiat ſubtractio, ut *in Arithmetica* (§. 41.) *docuimus;* pro ſuperſcriptione virgularum in reſiduo, *ſervetur regula V. ejusdem.* (§. 109.)

DEMONSTRATIO.

Per datam reſolutionem in reſiduo habentur ſingulæ differentiæ ſpecierum ſingularum minoris à majore, ſed etiam habentur differentiæ ex ſingulis ſpeciebus unitatum, decadum, &c. ergo in reſiduo habetur tota differentia totius numeri minoris à majore, Q. E. D.

Exempla ſubtractionis logiſticorum decimalium deſumptis numeris ex adductis in additione exemplis.

PARADIGMA I.

Subtractionis logiſticorum decimalium ſimplicium.

EXEMPLUM I.

	0 / // ///
	1 6 3 8 8 C
	0 / // ///
Subtrab.	7 4 3 6 B
	0 / // ///
Reſiduum	8 9 5 2 A

EXEMPLUM II.

	0 //
Sit ſubtrahendus	3 & 2 à
	0 / //
	8 6 9 C
	0 / //
Subtrab.	3 0 2 B *compl.*
	0 / //
Reſiduum	5 6 7 A

EXEMP. III. IN ADDIT. IV.

	0 / // ///
	1 8 2 6 C
	/ // ///
Subtrah.	9 8 9 B
	/ // ///
Residuum	8 3 7 A

EXEMP. NOVUM.

Sint subtrahendi 2 / & 3 /// *à* 7 0 *erunt*

	0 / // ///	
	7 0 0 0	*re-*
	/ // ///	*ducti.*
Subtrah.	2 0 3	
	0 / // ///	
Residuum	6 7 9 7	

PARADIGMA II.

Subtractionis logisticorum decimalium □.

EXEMPLUM I.

	0 / // ///
	1 2 3 1 0 4 9 4 C
	0 / // ///
Subtrah.	7 9 6 7 9 5 8 B
	0 / // ///
Resid.	4,3 4,2 5,3 6 A

EXEMPLUM II.

Sint subtrahendæ 5 0 & 60 // *ab*

	0 / //
	1 0 3 4 8 6 C
	0 / //
Subtrah.	5 0 0 6 0 B *redu.*
	0 / //
Residuum	5,3 4,2 6 A

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi 24 / □ & 53 /// □ *ab* 8 0 □ *erunt*

	0 / // ///	
	8 0 0 0 0 0 0	*reducti.*
	/ // ///	
Subtrah.	2 4 0 0 5 3	
	0 / // ///	
Residuum	7,7 5,9 9,4 7	

PARADIGMA III.

Subtractionis logisticorum decimalium cubicorum.

EXEMPLUM I.

	0 / //
	1 4 6 8 8 6 9 2 C
	0 / //
Subtrah.	9 7 9 8 9 0 7 B
	0 / //
Residuum	4,8 8 9,7 8 5 A

Ex-

EXEMPLUM NOVUM.

/ ° //
Sint subtrahendi 803 *cubici ab* 7, & 234
erunt

```
           ° /   //
           7000234 } reducti.
             /   //
Subtrab.   803000
           ° /   //
Residuum 6,197,234
```

SCHOLION.

113. *Examen, sive proba subtractionis fit per additionem, ut in* Arithmetica (§. 43.) & Logist. (§. 109.) ostensum est. *Ex contemplatione quoque horum exemplorum liquet, non inutilem esse tyronibus observationem* regulæ III. additionis (§. 109.)

CAPUT IV.

De multiplicatione logisticorum decimalium.

THEOREMA II.

114. PROP. *Factum, sive productum ex logisticis factoribus decimalibus* simplicibus, *in factores logisticos* simplices, *est Area, seu superficies, constans* quadratis *logisticis decimalibus; Item factum, sive productum ex factoribus logisticis* quadratis, *in factores* simplices *logisticos, est corpus, (aut saltem spacium) constans cubis logisticis decimalibus.*

DEMONSTRATIO.

I. *Pars* patet ex definitione (§. 90.)
II. *Pars* ex definitione (§. 97.)

PRO-

PROBLEMA V.

115. PROP. *Numeros logisticos decimales invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ante omnia advertendum: an factores sint ejusdem speciei? (ut ejusdem denominationis quoque sint, necesse non est) & utrum species intermediæ non deficiant.

Itaque I. Si non sint ejusdem speciei, aut aliqua species intermedia deficiat, reducantur ad eandem speciem, & intermediæ species compleantur. *Ut in Addition. & subt. dictum.*

II. Scribantur sub se invicem, ut in *Arithmetica* (§.53.) *docuimus.* Fiat multiplicatio, & facta partialia addantur in unum factum totale, ut *eodem* (§.53.) *dictum.*

III. Factum totale per virgulas distinguatur in species suas, quæ distinctio hac ratione perficitur. *Primo: Si factores ambo erant logistici simplices;* tali casu, in facto totali super notam penultimam dextimam tot ponantur virgulæ, quot erant in aliquo factorum speciem minimam denotantes, & ab ea notata inchoando, sinistram versus, signentur alternando reliquæ notæ per virgulas numero decrescentes. (§.93.) *Secundo: Si unus factorum fuit quadratus, alter simplex;* tali casu, signetur nota tertia dextima per virgulas denonotantes ſpeciem minimam factorum, & ab hac notata, ſiniſtram verſus, ſingulæ ternæ notæ ſignentur per virgulas numero decreſcentes. (§. 101.)

DEMONSTRATIO.

Regula II. demonſtrata eſt ſupra (§. 53.) Reg. III. demonſtrata eſt (§. 114.) Reg. I. patet, quia hac ratione determinatur locus debitus ſcribendi facta partialia, & in unum factum totale addendi. Q. E. D.

PARADIGMA I.

Multiplicationis, ſi factores ſint logiſtici ſimplices.

EXEMPLUM I.

```
          ┌ 0 / //
Factores ─┤ 8 4 3
          │ 0 / //
          └ 7 3 2
          ─────────
facta       1 6 8 6
partialia  2 5 2 9
          5 8 9 1
          ─────────
          0 /  //
fact. tot. 6 1,6 0,7 6 □ per reg. III.
```

EXEMPLUM II. REG. I. & III.

Si unus factorum detur 3 & 7, *& alter* 2 & 4 (with 0 // over 3 & 7, and 0 /// over 2 & 4) *erunt*

```
          ┌ 0 / // ///
Factores ─┤ 3 0 7 0   reducti per (§. 89.)
          │ 0 / // ///      &
          └ 2 0 0 4   completi (§. 88.)
          ──────────────
Facta partialia  1 2 2 8 0
                6 1 4 0
          ──────────────
          0 /  //  ///
Factum totale 6,1 5,2 2,8 0 □ per reg. III. ſignatum.
```

PA-

PARADIGMA II.

Si factorum unus sit logisticus □, *alter logisticus* simplex.

EXEMPLUM I.

$$\textit{Factores}\begin{cases} \overset{0}{6}\overset{\prime}{1}5\overset{\prime\prime}{2}2\,\square \\ \overset{0}{7}\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{4} \end{cases}$$

246088
184566
430654

$$\textit{Factum tot.}\ \overset{0}{45},\overset{\prime}{157},\overset{\prime\prime}{148}\ \textit{cubici per reg. III. hujus.}$$

EXEMPLUM II.

Sint $\overset{0}{3}$ □, & $\overset{\prime\prime}{25}$ □, *multiplicandi per* $\overset{0}{2}$ & $\overset{\prime\prime\prime}{5}$ *simplices. erunt*

$$\textit{Factores}\begin{cases} \overset{0}{3}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}2\overset{\prime\prime\prime}{5}00\,\square \\ \overset{0}{2}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{5} \end{cases} \begin{matrix}\textit{completi per (§. 94.)} \\ \& \\ \textit{reducti per (§. 92.)}\end{matrix}$$

Facta partialia 15012500
6005000

$$\textit{Fact. tot.}\ \overset{0}{6},\overset{\prime}{020},\overset{\prime\prime}{012},\overset{\prime\prime\prime}{500}\ \textit{cubica per reg. III. hujus.}$$

Examen multiplicationis fit ope divisionis infra docendæ.

SCHOLION I.

116. *Productum* Exempli I. Paradig. I. *quod juxta nostram methodum sub hac forma*: $\overset{0}{61},\overset{\prime}{70},\overset{\prime\prime}{76}$ *exhibuimus*, *secundum* vulgarem *modum multiplicandi logisticos decimales, ita exprimeretur*: $\overset{0}{6}\overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{7}\overset{\prime\prime\prime}{0}\overset{iv}{7}6$. *Item in* exemp. II. parad. I. *productum nostrum*: $\overset{0}{6},\overset{\prime}{15},\overset{\prime\prime}{22},\overset{\prime\prime\prime}{80}$, *juxta* vulgarem, *ita haberetur*: $\overset{0}{6}\overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{iv}{2}\overset{v}{8}$. *Videlicet vir-*

virgulæ speciei minimæ factorum colliguntur in unam summam, hæc summa virgularum, dextimæ notæ producti superponitur, signando reliquas producti notas virgulis numero decrescentibus sinistram versus; ex qua methodo signandi, perturbationem, & variationem significationis virgularum oriri necesse est; nam cum in producto sint quadratæ *perticæ, pedes, digiti &c. atque adeo bini numeri assignandi sint classi unius speciei,* (§. 93.) *item in producto* cubicarum perticarum pedum *&c. tres numeri unam classem constituant, liquet, variari significationem virgularum. Sic in producto* Exem. II. parad. I. *vulgariter expresso*: $\overset{0}{6}\,\overset{/}{1}\,\overset{//}{5}\,\overset{///}{2}\,\overset{iv}{2}\,\overset{v}{8}$ *virgulæ binæ supra numerum* $\overset{//}{5}$ *positæ, non significant* digitos, *sed pedes* □. *Item tres, & quatuor virgulæ numerorum* $\overset{///}{2}\,\overset{iv}{2}$, *non significant lineas, & partes decimales linearum, sed digitos* □, *atque idem est de cæteris virgulis, quæ eam speciem non significant, quam præseferunt. Quæ variatio significationis tyronibus magnum facessit negotium discernendi veros valores.*

SCHOLION II.

117. *Quoniam factores* (juxta modum vulgarem) *non reducuntur ante multiplicationem ad eandem speciem, si diversæ speciei infimæ factores simplices sint, & summa virgularum sit impar, sequitur, notam dextimam producti, signatam per summam virgularum non significare* unitates, *sed* decades *in productis* □. *In cubicis vero productis nec regula statui potest, cum virgulæ* centenariorum *alternando, jam pares, jam impares sint. Sic in* exemp. II. paradig. I. *juxta vulgarem expresso*; $\overset{0}{6}\,\overset{/}{1}\,\overset{//}{5}\,\overset{///}{2}\,\overset{iv}{2}\,\overset{v}{8}$, *dextima nota* 8, *non valet* octo unitates, *sed octo* decades, *id est* 80; *unde rursus tyronibus errandi campus quidem aperitur, sed via declinandi erroris, aut corrigendi non satis ostenditur ad captum.*

SCHOLION III.

118. *Ostendendum nobis est, quod* (§. 96.) *nos facturos recepimus, regulam* vulgarem, *universalem non esse*

esse hanc: ut virgulæ factorum decimalium, signantes speciem minimam, collectæ in unam summam superscribantur notæ dextimæ in producto totali. *Nam*,

TAB. LOG. Fig. 3. Ex. gr. *sint multiplicandi* $4'$ *per* $2'$, *dico productum esse* $8'$, *id est octo pedum*, *ergo productum* 8, *hoc modo signatum* ($8''$) *male per duas virgulas exprimitur*. Ostenditur: *vel enim appositæ juxta modum* vulgarem *virgulæ retinent suam significationem digitorum? vel non retinent? si retinent*, *falsum est*, *productum ex* $2'$ *pedibus in* $4'$ *pedes esse* $8''$ *digitos*, *quia evidens est*, *esse* $8'$ *pedes* □, *si vero non retinent significationem digitorum*, *sed in tali casu*, *duæ virgulæ non* digitos, *sed* pedes, *significare debeant*, *ergo non eadem servatur hypothesis virgularum*, *quæ variatio hypothesium in omni methodo non levem inducit terminorum confusionem*, *ac perturbationem*. Deinde, *si mutant significationem virgulæ* (*ut eam mutari necesse est*) *novis erit opus regulis docentibus*, *unde initium summendum sit signandi*, *&* *quot virgulæ pro inducta variatione accipi debeant*, *ad hoc*, *ut proximam speciem indicent*; *quas regulas in productis*, *præsertim cubicis*, *non est facile generales statuere*, *cum supponatur* determinatio *speciei maximæ sinistram versus*, *cujus tamen* determinatio *non docetur universaliter sine algorithmis fractionum decimalium*, *quibus substitutæ sunt virgulæ. Unde apparet nostram methodum*, *& faciliorem*, *& intellectui tyronum longe commodiorem*, *atque in praxi minime erroneam esse.*

SCHOLION IV.

119. *Ne tamen aliquid neglexisse videamur*, *quod tyronibus usui esse queat*, *problema sequens subjungimus*, *quodvis productum juxta vulgarem methodum expressum*, (*secus*, *si non sit expressum*) *ad nostram reducendi*, *modo constet*, *an productum sit quadratorum decimalium*, *an cubicorum*, *seu quod idem est*, *num fuerint factores simplices*, *vel unus eorum quadratus*, *alter simplex. Igitur*

PRO-

PROBLEMA VI.

120. PROP. *Reducere productum logisticum* □, *juxta methodum vulgarem expressum, ad nostram methodum.* Item *productum logisticum cubicum vulgarem.*

RESOLUTIO.

I. *Si productum est logisticus* □, Ex. gr. $\overset{0}{6}\,\overset{I}{1}\,\overset{II}{5}\,\overset{III}{2}\,\overset{IV}{2}\,\overset{V}{8}$, inchoando à nota unitatum in specie perticarum, *Ex. gr.* $\overset{0}{6}$, facto inferne *commate*, post singulas binas notas dextram versus ponatur *comma*, ut *exemplum docet*: $\overset{0}{6},\overset{I}{1}\,\overset{II}{5},\overset{III}{2}\,\overset{IV}{2},\overset{V}{8}$, designabit prima post perticam classis *pedes*; classis secunda, *digitos*; tertia classis *lineas* □ &c.

Notandum: *Si in dextima classe reperiatur una nota numerica (ut in hoc exemplo numerus 8) hæc valere debet decades* □.

Quod si non adsint perticæ, pro prima classe sinistima, duæ notæ accipiantur, atque ab hac classe, reliquæ classes per duas notas determinentur, designabunt virgulæ, supra notam sinistimam positæ, speciem maximam. *Ex. gr.* $\overset{I}{1}\,\overset{II}{9},\overset{III}{4}\,\overset{IV}{4}$, erunt 19 digiti □, 44 lineæ □

II. *Si productum est logisticus cubicus*, *Ex. gr.* $\overset{0}{4}\,\overset{I}{5}\,\overset{II}{1}\,\overset{III}{5}\,\overset{IIII}{7}\,\overset{IV}{1}\,\overset{V}{4}\,\overset{VI}{8}$ facto *commate* post unitates perticarum, ponatur *comma* post singulas ternas notas dextram versus, ut in *exemplo*: $\overset{0}{4}\,\overset{/}{5},\overset{//}{1}\,\overset{///}{5}\,\overset{\text{IV}}{7},\overset{\text{V}}{1}\,\overset{\text{VI}}{4}\,8$, designabit prima post perticas classis, *pedes cubicos*; secunda, *digitos cubicos*, &c.

Notandum: *Si in dextima classe reperiatur una tantum nota numerica, hæc valet centenarios, si duæ, tunc prima valet centenarios, secunda decades.*

Quod si non adsint perticæ cubicæ, tali casu, pro prima sinistima classe tres notæ assignentur, & ab hac reliquæ determinentur, *ut supra* (§. 110.) *de quadratis diximus.* Demonstratio I. partis patet ex (§. 92.) II. partis ex (§. 100.)

CAPUT V.

De divisione logisticorum decimalium.

PORISMA.

121. PROP. *Quod multiplicatio componit seu colligit, tollit aut solvit divisio, & vicissim.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicatio est ejusdem quantitatis toties ad seipsam facta *additio*, quot unitates altera quantitas denotat (§.46.& 90.) & *divisio* est quantitatis minoris à majore toties facta *subtractio*, quoties minor in majore continetur, seu quot unitates denotat quotus, (§. 42.) sed quod colligit

seu

ſeu ponit *additio*, aufert ſeu tollit *ſubtractio*, (§. 37. & 43.) ergo quod *multiplicatio* componit ſeu colligit, tollit aut ſolvit *diviſio*. Q. E. D.

THEOREMA III.

122. PROP. *I. ſi numeri logiſtici decimales □ dividantur per logiſticos ſimplices, quotus producitur logiſticus ſimplex. II. ſi logiſticus decimalis cubicus dividatur per logiſticum ſimplicem, quotus erit logiſticus □, & viciſſim, ſi cubicus logiſticus dividatur per logiſticum □, quotus eſt logiſticus ſimplex.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. logiſticus □ componitur per multiplicationem factorum ſimplicium (§. 90.) ergo per diviſionem ſolvitur iterum in factores ſimplices (§. 121.) ſed factores ſunt *diviſor*, & *quotus* (§. 61. & 67.) ergo ſi numeri logiſtici □ dividantur per logiſticos ſimplices, quotus producitur logiſticus ſimplex. Q. E. D. Eodem modo demonſtratur pars altera.

THEOREMA IV.

123. PROP. *Dividendus logiſticus nequit eſſe logiſticus ſimplex, ſeu unius dimenſionis, ſi tam diviſor, quam quotus emergens ſit logiſticus decimalis.*

DEMONSTRATIO.

Dividendus logisticus æquatur facto, quod producitur ex *quoto* logistico in *divisorem* logisticum ducto (§. 61. & 67.) ergo *quotus*, & *divisor* sunt duo factores logistici, sed factum logisticum ex *factoribus logisticis* est duarum dimensionum saltem per (§. 90.) ergo *dividendus* logisticus nequit esse logisticus unius dimensionis, id est *simplex*. Q. E. D.

COROLLARIUM.

124. Hinc si *dividendus* proponatur sub forma *simplicis* per virgulas expressus (ut proponitur in logistica vulgari) hic reipsa sub ficta imagine *simplicis*, aut □ est, aut *cubicus*, prout factores, aut erant logistici simplices ambo, aut unus logisticus simplex, alter □. *Ex. gr.* sit: $\overset{0}{6}\,\overset{I}{1}\,\overset{II}{7}\,\overset{III}{0}\,\overset{IIII}{7}\,\overset{IV}{6}$ propositus numerus logisticus sub ficta imagine *simplicis*; hic numerus reipsa logisticus □ est, productus ex factoribus simplicibus: $\overset{0}{8}\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{3}$, & $\overset{0}{7}\,\overset{I}{3}\,\overset{II}{2}$, atque à nobis sub sua vera imagine propositus habetur (§. 115.) *parad. I. exempl. I.* ita expressus: $\overset{0}{61},\overset{I}{70},\overset{II}{76}$.

SCHOLION.

125. *Etsi dividendus esse nequeat logisticus simplex*, (§. 123.) *sua tamen utilitate non caret hæc fictio*, *cum ope hujus* valor quoti *in divisione logisticorum facillime determinetur per virgulas*, ut infra patebit. *Itaque ad fictam hanc imaginem simplicis ante divisionem reducendus erit dividendus*, *si is nondum formam simplicis induit*, *quæ reductio per resolutionem sequentis problematis ostenditur.* PRO-

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Reducere numerum logiſticum decimalem quemvis □, aut cubicum ad fictam imaginem ſimplicis.*

RESOLUTIO.

I. Si in dato numero adſint perticæ; tali caſu, dextimæ notæ reducendi ſuper ponantur tot virgulæ, quot numerantur notæ numericæ inchoando à perticis dextram verſus. *Ex.gr.* Sit propoſitus numerus logiſticus □, ad formam fictam ſimplicis reducendus: $\overset{\circ}{6}1,\overset{\prime}{7}0,\overset{\prime\prime}{7}6$, erit ad fictam imaginem ſimplicis reductus: $6\overset{\circ}{1},707\overset{\text{iv}}{6}$. Quia 4 notæ numerantur inchoando à perticis ad finem, quas claritatis gratia adjecto *commate* diſtinximus.

II. *Si perticæ non adſint;* tali caſu, reducetur, ſi à virgulis ſpeciem in dato numero maximam ſignantibus inchoando, omnes reliquæ notæ virgulis numero creſcentibus ſignentur. *Ex. gr.* Sit reducendus ad formam ſimplicis: $1\overset{\prime}{5},2\overset{\prime\prime}{2},8\overset{\prime\prime\prime}{0}$, in quo ſpecies maxima ſunt pedes, erit reductus: $\overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{\text{iv}}{2}\overset{\text{v}}{8}\overset{\text{vi}}{0}$. Seu brevius ultimam tantum ſignando: $1528\overset{\text{vi}}{0}$. *Hæc reſolutio demonſtratione non eget.*

PROBLEMA VIII.

127. PROP. *Dividere numeros logisticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an tam *dividendus*, quam *divisor* sint sub forma logistici simplicis; *vide exemp. I.* Si non sint, reducantur, juxta regulas (§.126.) datas, *vide Ex. II.*

II. Si *dividendus* reductus non continet saltem speciem linearum, augeatur in fine tot zeris, quot requiruntur, ut sub forma simplici saltem lineas logisticas contineat, (juxta §. 84.) *vide exempl. III.*

III. Instituatur divisio, ea prorsus methodo, qua in numeris vulgaribus (§.64.) usi sumus, nihil respiciendo virgulas, sed eas pro non adjectis habendo.

IV. Finita divisione, ut inventus quotus apte per virgulas signetur, numerus virgularum, speciem minimam in *divisore* signantium, subtrahatur à virgulis *dividendi* itidem speciem minimam denotantibus, & (si quotus simplex est) per residuas virgulas signetur dextima quoti nota, à qua inchoando signentur reliquæ per virgulas numero decrescentes sinistram versus. *Vide exempl. I. II. & III.* Si vero quotus □ sit, (ut fit, si logisticus cubicus per divisorem simplicem dividatur) isque

sub

ſub ficta imagine ſimplicis lateat, reducendus erit ad veram ſuam formam, per (§. 120.) *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. demonſtratione non egent. Reg. III. patet ex (§. 86.) ſolum igitur reſtat, ut Reg. IV. demonſtretur: tunc *quotus* juxta datam regulam exacte ſignatus habetur, quando ita ſignatus, per *diviſorem* quoque ſignatum multiplicatus, reſtituit cum iisdem virgulis ſignatum *dividendum*, ſed *quotus* ita ſignatus, & multiplicatus per *diviſorem* ſignatum reſtituit *dividendum* exacte ſignatum per (§. 115.) ergo Q. E. D.

PARADIGMA DIVISIONIS.

logiſticorum decimalium.

EXEMPLUM I.

Sit ſub forma logiſtici ſimplicis.

	0 / // /// iv	0 / //	
I. *Divid.*	6 1 7 0 7 6	8 4 3	*quotus log. ſimplex, & ſignatus virgulis per reg. IV.*
	0 / //		
Diviſor	7 3 2 . .		
fact. ſub.	5 8 5 6 . .		
II. *Divid.*	3 1 4 7 .		
Diviſor	7 3 2 .		
fact. ſub.	2 9 2 8 .		
III. *Divid.*	2 1 9 6		
Diviſor	7 3 2		
fact. ſubtr.	2 1 9 6		
	0 0 0 0		

EXEMPLUM II.

0 / // ///
Sit dividen. 6,1 5,2 2,8 0
erit
ad formam simplicis.
0 vi 0 / ////
I. Div. red. 6 1 5 2 2 8 0 (3 0 7 0 *quotus logist. simplex & signatus virgulis per reg. IV.*
///
Divisor 2 0 0 4 . . .
fact. subt. 6 0 1 2 . . .

II. Dividend. 1 4 0 2 . .
Divisor 2 0 0 4 . .

III.Ividen. 1 4 0 2 8 .
Divisor 2 0 0 4 .
fact. subtr. 1 4 0 2 8 .

IV.Ividen. - - - - - 0
Divisor 2 0 0 4

EXEMPL. III. REG. II.

0 / //
sit div. 8 6 4 *erit auct.* ze
0 / // /// IV 0 / //
I. Div. 8 6 4 0 0 (3 7
0 /
Divisor 2 3 . . .
fact. sub. 6 9 . . .

II. Div. 1 7 4 . .
Divisor 2 3 . .
fact. sub. 1 6 1 . .

III. Div. 1 3 0 .
Divisor 2 3 .
fact. subt. 1 1 5 .

IV. Div. 1 5 0
Divisor 2 3
fact. subt. 1 3 8

Residuum 1 2 *negligitur ob parvitatem.*

EXEMPLUM IV.

0 / //
Sit dividend. 4 5,1 5 7,1 4 8, *erit reductus ad form. simplic.*
0 IV 0 / // /// IV
I. Dividend. 4 5 1 5 7 1 4 8 (6 1 5 2 2 *quotus quadratus, & reductus per* (§. 119.)
0 / //
6,1 5,2 2,
0 / //
Divisor 7 3 4 . . . .
fact. subtr. 4 4 0 4 . . . .

II. Dividend. 1 1 1 7 . . .
Divisor 7 3 4 . . .
fact. subtr. 7 3 4 . . .

III. Dividend. 3 8 3 1 . .
Divisor 7 3 4 . .
fact. subtrah. 3 6 7 0 . .

IV. Dividend. 1 6 1 4 .
Divisor 7 3 4 .
fact. subtrah. 1 4 6 8 .

V. Dividend. 1 4 6 8
Divisor 7 3 4
fact. subtrah. 1 4 6 8

Residuum - - - - 0 0 0 0

SCHOLION I.

128. *Examen divisionis instituitur, ope multiplicationis* (§. 115.) *quotus nempe multiplicatus per divisorem restituere debet dividendum.*

SCHOLION II.

129. *Si divisor sit logisticus incompletus, seu si intermediæ species desint, compleatur juxta superius tradita.* (§. 89. 94. & 102.)

SCHOLION III.

130. *Ratio cur in casu reg. II. augendus sit dividendus per zeros, hæc est, ut si post divisionem ultimam aliquid remaneat, id in praxi negligatur ob minutiam exiguam, quæ pro nihilo habetur, cum ultra lineas decimales in praxi ordinaria vix procedatur, etsi in Philosophia naturali longe majore opus sit accuratione, nec unquam nimia fuerit, si vel cum indefinite parvis quantitatibus calculus institui posset.*

SCHOLION IV.

131. *Prolixiorem me fuisse in hoc calculo logistico tradendo non diffiteor, in quo etiam à* praxi vulgari *in quibusdam recessi, sed enim noverint tyrones (in quorum gratiam hæc conscripta sunt) nunquam nimium esse posse in eo, quod est fundamentum maximum totius calculi Geometrici, & Philosophiæ naturalis, fidenter ajo, quemadmodum tyro in his logisticorum decimalium Algorithmis egregie versatus, omnes tum Geometriæ praxes, tum Philosophiæ naturalis experimenta ad calculum revocans, inoffenso pede percurrendo, facillimè determinabit; Ita his non insignitus Mathematicus, aut Philosophus, nihil præter errores (si calculum spectes) loquetur.*

ARITH-

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

CAPUT I.

De Reductione numerorum mixtorum Heterogeneorum reducibilium.

PROBLEMA I. UNIVERSALE.

132. PROP. *Reducere quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem ad species inferiores, & vicissim speciem inferiorem ad superiorem.*

RESOLUTIO.

I. *Si species superior, seu major reducenda sit ad inferiorem, seu minorem.* Multiplicetur species major per speciem minorem, id est, per eum numerum speciei minoris, cujus unitates adæquant unitatem speciei superioris, seu majoris. *Ex. gr.* Sint reducendi 7. flor. germ. ad speciem crucif.

cum

cum unus flor. in specie xr. habeat 60 unitates, multiplicentur 7 per 60, erit factum 420 xr. seu 7 fl. reducti ad cruciferos.

II. *Si species inferior, seu minor reducenda sit ad superiorem, seu majorem;* opus est divisione, videlicet; species inferior, seu minor dividatur per tot unitates, quot species inferior continet relate ad unitatem speciei superioris, ad quam reducenda est. *Ex. gr.* Sint reducendi 420 xr. ad fl. ger. cum flor. germ. contineat 60 xr. dividantur 420 xr. per 60, & quotus 7 designabit fl., seu speciem majorem.

SCHOLION I.

133. *Si quod residuum ex divisione sit, illud est ejusdem speciei cum* dividendo. Ex. gr. *Si ex divisione crucifer. remaneat aliquid, illud sunt xr.*

SCHOLION II.

134. *Cum ad reductionem numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium prærequiratur notitia specierum inter se reducibilium, non inutile censuimus, quasdam tabulas subjungere, in quibus singularum specierum unitates continerentur, quarum usus ad calcem tabularum declaratur.*

SCHOLION III.

135. *Sua utilitate non carebit nobis in Transylvania versantibus praxim adferre, qua calculo perquam facillimo absque multiplicatione illico determinare licet, quotnam dati flor. germ. conficiant fl. Ung. per Transylvaniam usitatos, & vicissim, quod sequentibus duobus problematibus docetur.*

PROBLEMA II.

136. PROP. *Flor. germ. integros in Ung. ope additionis convertere.*

RE-

RESOLUTIO.

Conſtare debet operanti, flor. Ung. in Tranſylvania valere 100 *nummos, quales in flor. germ. habentur* 120, *juxta tabulam infra ponendam.* Igitur I. Si dentur flor. germ. quotcunque convertendi in Ungaricos, ſcribantur hi dati flor. germ. bis directè infra ſe invicem, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. reſpondeant, deinde idem numerus florenorum adhuc ſemel infra cæteros, ſed una nota remotius, ſiniſtram verſus, ſcribatur.

II. Subducta linea hi numeri addantur in unam ſummam, cui ſummæ ad dextram adjungatur zerus.

III. A ſumma hac duæ notæ dextimæ abſcindantur, erunt hæ duæ notæ nummi, reliquæ ad ſiniſtram erunt flor. Ung. quos valent dati flor. germ. *Ex. gr.* Quæritur: 16 flor. germ. quot faciunt Ungaricos? Igitur juxta datas regulas ſic ſtabit operatio, id eſt flor. 16 germ. faciunt 19. flor. Ung. & 20 nummos.

16
16 } *Reg. I.*
16
flor. ———
Ung. 19,20 *numi*

DEMONSTRATIO
hujus Praxeos.

Quod hoc ordine numeri flor. ſcripti per additionem convertantur in Ung. eſt, quia hujusmodi additio vicem ſubit multiplicacationis, quæ fieri deberet per 120 nummos, quot nempe nummos habet fl. ger. juxta (§. 132.); nam ad oculum patet, si 16 multiplicentur per 120, eodem modo collocati reperientur numeri. *Ex.gr.* In quo exemplo productum primum per numerum 2 est 32, sed hoc est 16 additum ad 16. *Deinde* ex producto secundo per numerum 1 patet, quod idem numerus 16 una nota remotior scribi debeat versus sinistram; ac *tandem*, quod zerus in fine summæ addi debeat, ratio est, quia multiplicans 120 habet zerum, ergo: Q. E. D.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 120 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 19{,}20 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

137. Quod si florenis germ. adhæreant crucif. hos per 2 multiplicando, aut (quod idem est) sibimet ipsis addendo, in nummos conversos adde classi nummorum.

COROLLARIUM II.

138. Hac methodo quilibet sibi facile conficere poterit tabellam, in qua ab uno flor. ger. ad 100 flor. conversio habeatur, qua uti poterit ad reducendos quotcunque flor. germ.

PROBLEMA III.

139. *Florenos datos Ungaricales per Transylvaniam usitatos, in German. convertere.*

RE-

RESOLUTIO.

I. Vide an flor. Ung. sint integri, sine nummis, an vero adjectos habeant nummos. Si sint integri sine nummis, appone zerum unum ad dextram, & numerum flor. divide per 12, quotus dabit flor. germ. *Vide exempl. I.*

II. Si quid residuum maneat ex hac divisione, huic residuo adde iterum zerum, cujus summæ *dimidium* valebit crucif. *Vide exempl. II.*

III. Si floreni adjectos habeant nummos, illos abscinde à flor. integris, & cum flor. operare, ut in *Resolutione I.* deinde ad residuum, si quod est, adde abscissos nummos, & hujus dimidium dabit crucifer. *Vide exempl. III.*

IV. Quod si summa nummorum ex residuo, & abscissis nummis adæquet numerum 120, cujus dimidium est 60, numero flor. invento addendus est unus flor. *Vide exempl. IV.*

EXEMPLUM I.

Sint flor. Ung. 24 in Germ. convertendi, erit

I. *divid.*	240	(20 *flor. germ.*
divis.	12	
fact. sub.	24	
II. *div.*	- - 0	
divis.	12	

EXEMPLUM II.

Sint flor. Ung. 28. erit

divid.	280	23 *flor. ger.* & 20 *cruc.*
divis.	12.	
fact.	24.	
divid.	40	
divis.	12	
fact.	36	

Resid. 4 *addito zero erit* 40, *cujus dimid.* 20 *xr.*

RE-

EXEMPLUM III.

Sint flor. Ung. 23 *numi* 40 *erit*

divid. 230 (19 *flor. ger.*
divis. 12 (30 *crucif.*

divid. 110
divis. 12
fact. 108

Residuum 2 *auctum zero erit* 20 *cum* 40 *facit* 60, *cujus dimidium* 30

EXEMPLUM IV.

Sint flor. Ung. 22 *numi* 80 *erit*

220 (18 *flor. germ.*
12 . (*crucif.* 60 *seu flor. ger.* 19.

110
12
96

Residuum 4 *auctum zero erit* 40 *cum* 80 *facit* 120, *cujus dimidium* 60 *cruc. seu fl. germ.*

CAPUT II.

REDUCTIONUM TABULÆ XV,

Ad praxim Arithmeticam summe utiles, ad usum vero civilem, & Philosophicum etiam necessariæ.

TAB. I.

Mensurarum vulgarium, seu civilium longitudinis.

$\frac{1}{4}$ *digiti.*

Digit.	4		
Pes	12	48	
Orgya una	6	72	288

Magnitudo pedis varia in Geometria adferetur.

TAB. II.

Ponderum Angliæ, *quibus in experimentis Philosophicis utuntur.*

Gran. min.

24	*Gran. maj.*		
480	20	*Uncia*	
5760	240	12	*Libra.*

Uncia valet $585\frac{1}{7}$ *gr. Paris. vel* $499\frac{4}{5}$ *gr. Apoth. Tab. VI.*

TABULA III.

Ponderum Civilium, seu Mercatorum per Austriam, Ungariam, & Transylvaniam.

1 libra hujus æquiponderat 1 lib. 2 unc. 4 gros. 22 gran. pond. Paris.

		1. Drachma, seu Quintl	$\frac{1}{4}$ *loth.*
		1. Semuncia, seu Loth	4
	1. Libra	32	128
1. Centenarius	100	3200	12800

TABULA IV.

Ponderum Galliæ, & Parisin.

Uncia hujus valet 1 Unc. 12$\frac{1}{6}$ gr. pond. Apoth. Tab. 6.

						1. Carobe, seu siliqua aut tertia pars oboli
					1. Grain, seu Granum	24
				1. Denier, ou carras, seu nummus	24	576
			1. Gros, seu grossus	3	72	1728
		Once, seu uncia	8	24	576	13824
	1. Marcha	8	64	192	4608	110592
1. Livre, seu libra	2	16	128	384	9216	221184

TABULA V.

Temporis vulgaris.

				Minut. 2dum
			Minut. 1mum	$''$ 60
		1. Hora	$60'$	3600
	1. dies	24°	1440	86400
1. Annus communis	$365\frac{1}{4}$	8766	525960	31557600

TABULA VI.

Ponderum Apothecariorum Nostratium.

1. *Granum.*				
20	1. *Scrupulus.*			
60	3	1. *Drachma.*		
480	24	8	1. *Uncia.*	
5760	288	96	12	1. *Libra.*

Granum valet circiter pondus unius grani piperis albi. Ponderis hujus 1 *libra, &* 7 *Unc. faciunt* 1 *libram nostratem Tab III. item* 1 *unc. ponderat* 562 *gr.* (*Paris.*

TABULA VII.

Ponderum Angliæ, Avoir du pois, seu Civil.

1. *Scrupul.*					
3	1. *Drachma.*				
24	8	1. *Uncia.*			
384	128	16	1. *Libra.*		
43008	14336	1792	112	1. *Centenar.*	
860160	286720	35840	2240	20	1. *Tonna.*

Uncia Angliæ valet 534. *grana pond. Parisini. Ponderis vero Apoth.* Tab. VI. *valet* 456. *gr.*

TABULA VIII.

Exhibens numerum librarum inter se, & cum Parisinis æquiponderantium ex Cl. Combe, Negoce rendu facile Pag. 448.

100 *Parisin.*	103 *August. Vind.*	125 *Vratislav.*
100 *Amstelodam.*	104 *Coloniens.*	150 *Genuens.*
100 *Argentorat.*	105 *Antverpiens.*	151 *Bononiens.*
89 *Genevens.*	105 *Hispaniæ.*	152 *Florent.*
95 *Berg. Norveg.*	105 *Lipsiens.*	166 *Venetia.*
98 *Basileens.*	113 *Dantiscan.*	169 *Neapolit.*
98 *Norimberg.*	114 *Lusitan.*	109 *Londin. min.*
102 *Hamburg.*	117 *Stockholm.*	97 *Londin. maj.*

Si Uncia Apoth. (*ut ponit* Cl. Eisenschm.) *habet* 562 *gr. Paris. tunc Vien. lib.* $86\frac{10}{32}$ *ferè faciunt* 100 *Paris.*

TAB. IX.

Valor pecuniæ Germ. in Transylvania.

			Nummi.
1. Crucif.			2
1. Grossus.		3	6
1. flor. germ.	20	60	120

Marianus, valet 17. xr. & septenarius 7. xr. ut in Austria, & Ungaria.

TAB. X.

Pecuniæ Ungaricæ per Transylvaniam.

Nummi.			
2			1. Crucif.
6	3		1. Grossus.
100	50	$16\frac{2}{3}$	1. fl. Ung. in Transf.

Marianus, & septenarius valorem suum retinent ut in Austria.

TABULA XI.

Valor pecuniæ Germ. in Ungaria.

						Nummi.
1. Crucif.						1 [illegible]/3
1. Grossus.					3	5
1. Septenar.				$2\frac{1}{3}$	7	$11\frac{2}{3}$
1. Marianus.			$2\frac{3}{7}$	$5\frac{2}{3}$	17	$28\frac{1}{3}$
1. flor. Germ.		$3\frac{9}{17}$	$8\frac{4}{7}$	20	60	100
1. Aureus Kremn.	$4\frac{1}{5}$	$14\frac{14}{17}$	36	84	252	420

TABULA XII.

Mensuræ Vini in Transylvania.

				Quadrans
1. Sextarius, seu Media.				2
1. Cupa, seu Mensura.			2	4
1. Urna Transylv.		8	16	32
1. Urna Germ. in Transyl.	5	40	80	160

2. Mensuræ Transyl. faciunt 1^{1}. mensuram Austriacam, vel Ungaricam cupam.

TA-

TABULA XIII.
Mensuras Geographorum exhibens.

	1. *Granum Hordei.*	1 *Digitus.*	1. *Palmus.*	1. *Pes.*	1. *Passus.*	1. *Stadium.*	1. *Milliare Italicum.*	1. *Milliare Germ. com.*	1. *Minutum.*	1. *Gradus.*
1 Digitus	4									
1. Palmus	16	4								
1. Pes	64	16	4							
1. Passus	320	80	20	5						
1. Stadium	40000	10000	2500	625	125					
1. Milliare Italicum	320000	80000	20000	5000	1000	8				
1. Milliare Germ. com.	1280000	320000	80000	20000	4000	32	4			
1. Minutum	320000	80000	20000	5000	1000	8	1	$\frac{1}{4}$		
1. Gradus	19200000	4800000	1200000	300000	60000	480	60	15	60	
Circulus maximus Telluris.	9612000000	1728000000	432000000	108000000	21600000	172800	21600	5400	21600	360
Diameter fere	2201600000	550400000	137600000	34400000	6880000	55040	6880	1720		

NB. Granum Hordei *secundum latitudinem suam accipitur.*

TABULA XIV.

Valor pecuniæ Germ. ſecundum Valachos in Tranſylvania.

Nummi.

2	1.*Crucif.*				
6	3	1.*Groſſus.*			
12	6	2	1.*Suſták.*		
34	17	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{6}$	1.*Horgas, ſeu Marian.*	
102	51	17	$8\frac{3}{6}$	3	1.*Vonás flor.*

TABULA XV.

Monetariorum noſtratium, exhibens gradum puritatis metallorum.

1.*Granum.*

12	1.*Carat, ſeu Gradus.*		
18	$1\frac{1}{2}$	1. *Loth.*	
288	24	16	1.*Marcha.*

Puritas obryſi, ſeu nullo heterogeneo metallo permiſti auri ſtatuitur eſſe 24 *carat, ſeu graduum, nempe totum pondus* 16 *loth, continet* 24. *gradus, ſeu carat auri puri; & ſecundum hunc numerum graduum, defectum puritatis exprimunt tam* Monetarii, *quàm* Aurifabri. Ex. gr. *Dum dicunt, ſpeciem auri dati eſſe* 23 *carat, indicare volunt, in Marcha auri admixtum eſſe unum carat de metallo heterogeneo.* Ex. gr. *Cupro. Similiter puritatem ſummam argenti ſtatuunt eſſe* 16. *loth, id eſt, in Marcha dantur* 16. *loth argenti puri, & ſecundum hunc numerum lothonum* (*quem* probam *vocant*) *exprimunt defectum puritatis argenti, dum dicunt.* Ex. gr. *Hoc argentum eſt* 14. *loth ſeu probæ decimæ quartæ, indicare volunt, Marcham, ſeu* (16. *Loth*) *hujusmodi argenti continere argenti puri loth* 14. *reliquos vero* 2. *loth, ad complendos* 16. *lothones, eſſe metallum heterogeneum* Ex. gr. *Cuprum admixtum; quam permixtionem* legam *vocant. Si vero pondus conſideretur, tunc* 72 *aurei Kremn. faciunt* Marcham, *& unus aureus ponderat* 4. *grana Tabulæ XV.* 3. *aurei faciunt unum carat ponderis,* 1. *carat appendit* 160. *grana ponderis Apothecariorum noſtratium.* PRO-

PROBLEMA IV.

140. PROP. *Usus harum Tabularum.*

RESOLUTIO I.

Si quæratur: unitas datæ ſpeciei majoris, quot continet unitates ex data ſpecie minore? Ex. gr. *Orgya civilis, quot continet digitos?* Exquire in Tab. I. titulum *Orgyæ*, & titulum *digiti*, & communis concurſus, ſeu cellula dabit petitum numerum, 72 digitorum; eadem eſto regula de cæteris tabulis.

RESOLUTIO II.

141. Si quæratur: *Ex.gr.* 8. orgyæ civiles quot faciunt digitos? Exquire, in Tab. I. unius orgyæ digitos, per prius dicta, qui ſunt 72, hos multiplica per datum numerum 8, dabit productum 756 digitos, qui continentur in 8 orgiis; *Hæc reſolutio eſt eadem, quæ probl. univerſ.* (§. 132.) *de reductione majoris ad minorem ſpeciem.*

RESOLUTIO III.

142. Si quæratur: *Ex.gr.* 756 digiti, quot faciunt orgyas? Exquire numerum digitorum unius orgyæ in Tab. I. quem invenies 72, & per hunc numerum divide datos 756 digitos, dabit quotus numerum orgyarum petitum 8. *Hæc reſolutio eadem*

est, cum probl. univ. (§.132.) *de reductione speciei minoris ad majorem.*

SCHOLION.

143. *Reliquos harum tabularum usus dabimus suis locis; interea curioso tyroni, coronidis loco, ultimas horum elementorum paginas, non ineruditis in notas Arithmeticas animadversionibus locupletatas, ad eruditum usum defero;* Primùm: *notas numericas Arabum modernorum;* dein *eorundem Arabum (vel ut alii volunt Indorum) antiquiores in Europam illatas numerorum figuras, quibus Europæi ad sæculum ferè* XVI. *usi fuere, adferam;* Subinde *originem Romanarum notarum dabo, ac postremo Tabellam tum Hebræi, tum Græci Alphabeti valorem literarum numericum exprimentem, adjunctis quibusdam veterum Græcorum notis compendiariis. Itaque.*

CAPUT III.

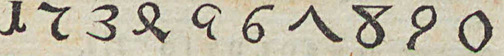
Animadversiones in notas numericas.

Figuræ, seu notæ Arabibus hodiernis usitatæ.

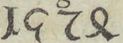
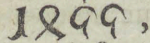
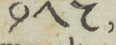
١ ٢ ٣ ۴ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Notæ numericæ Arabicæ ab Europæis olim usurpatæ.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Notis his postremis Arabicis, etiamnum in plerisque Templis, & ædibus antiquioribus, per Austriam, Ungariam, & præsertim per Transylvaniam in sedibus, ut vocant, Saxonicis, annos legimus consignaſignatos, *Ex.gr.* legitur annus poſitarum ædium: , aut , vel , quos, niſi eruditus lector, nemo alter interpretabitur.

Notæ Romanæ hodiernæ, quæ vulgo pro literis latinorum habentur.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

L.	C.	D.	M.
50	100	500	1000.

En Originem harum notarum.

Quemadmodum hodiernum rude vulgus hominum, ita Romani populi Patres primi, ignari Arithmeticæ, res ſuas numero definitas, lineolis, ſeu virgulis deſignabant, & exprimebant *Ex.gr.* Volentes exprimere, ſe viginti modios tritici venumdediſſe, ita ſcripſerunt: IIIIIIIIIIIIIIIIIIII, atque harum ope virgularum maximos quosvis exprimebant numeros; qui modus conſignandi numeros, utpote prolixus admodum, & rudis tædium non leve conſignandi, computandique creabat. Igitur de breviore modo ſcribendi per easdem uſu receptas virgulas à quibusdam acutioris ingenii cogitatum eſt, videlicet, ut duabus, tribusve virgulis, varie ad ſe invicem inclinatis, prolixiorem modum redderent breviorem, conſenſuque communi hominum in usum civilem inducerent. Itaque compendium, à numero *quinario* inchoantes, ita exorsi videntur.

1. Numerum IIIII quinque virgularum, duabus virgulis ad se invicem inclinatis indicabant, videlicet \/ dein celerius exarando ita conjungebant V, unde orta figura hodierna numeri *quinque* (V), seu litera (v).

2. Hac figura numeri *quinque* \/ cum adjunctis dextram versus virgulis rectis exprimebant cæteros usque ad decadem, seu numerum decem; cum itaque bis *quinque* sit *decem*, è duabus notis numeri *quinque*, sibi ad verticem oppositis, figuram numeri *decem* composuerunt, videlicet \/ /\ , quam celerius scribendo, ita efformabant X, cui originem debet nunc usitata nota (X) seu litera (x).

His quatuor virgulis IIII, nota *quinarii* \/ , & *decenarii* X compendium quidem in minoribus, at non in majoribus numeris nacti Romani, cæteras quoque numerorum figuras invenêre.

3. Itaque per incrementum *quinarii*, cum \/ /\ \/ /\ \/ /\ \/ /\ \/ /\ seu quinquies decem, sit *quinquaginta*, è binis virgulis rectis hoc situ I_ collocatis figuram com-

componentes, *quinquaginta* indicarunt, quam celerius figurando, ita ſcribebant, L, ex qua hodierna nota (L) ortum habet.

4. Porro, cum *centum* ſit bis quinquaginta, binas notas numeri *quinquaginta* I‗I‗ hoc ſitu I⊏, quaſi inverſam unam I‾, alteram rectam I‗ conjungentes expreſſerunt, quam celerius exarando, ita figurabant I⊏, dein ita ⊏, ac tandem celerrime fingendo in hanc C abiit, non abſimilem literæ hodiernæ (C), centum deſignanti.

5. Cum quinquies centum ſint *quingenta*, loco figuræ centum, quinquies repetitæ, notas duas centenarii, converſim jungendo I⊐I, ſubſtituerunt, quæ celeritate ſcribendi in hanc I⊐, dein in hujusmodi IↃ aut ſimilem IↃ, ac tandem in hanc D figuram, literæ (D) conformem, & hodie uſitatam tranſiit.

6. Denique cum bis quingenta efficiant *mille*, binas *quingentarum* notas converſim locando, I⊏I⊐I *mille* efformabant, atque celerius ſcribendo ita ⊏I⊐ ſeu CIↃ, celerrime CIↃ, vel CIↃ, aut m, quæ ultima figura, ſimillima minori literæ (m) occaſionem præbuit ſcribis, eam elegantius efformandi per literam majorem (M) nunc uſitatam. Harum varias figuras ſub unum conſpectum hic exhibeo.

Nu-

Numeri Romani originarii.

Notæ primævæ I, \/, X, I⊥, I⊏, I⊏I, I⊏I⊐
Celerius scriptæ I, V, X, L, I⊏, I⊐, ⊏I⊐
Multo celerius I, V, X, L, C, IↃ, CIↃ
Celerrimè I, V, X, L, C, D, ↀ
Ex quibus
Ortæ hodiernæ I, V, X, L, C, D, M.

His septem figuris omnem numerum consignabat populus Romanus sua adhuc ruditate felix, quibus ingeniosa posteritas alias quasdam adjecit, quarum nonnullas ex Arithmetica Cl. Poëtii excerptas damus.

Signum ∞ vel ∞, aut ◇◇ usurpatum est loco numeri 1000.

Signum , vel , aut ↂ significabat numerum: 10000.

Geminata vel , designabant bis 10000, seu 20000.

Si signum millenarii (∞) anteponatur, *Ex. gr.* ∞ , subtrahendum intelligitur, id est: 19000.

Signum XX vel XX significat 20, & XXX denotat 30. quibus usu posteriore accesserunt signa ab Authoribus ætatis etiam aureæ passim usurpata sequentia.

(I),	I)),	((I)),	I))),	(((I))),	((((I)))).
$\overline{\text{I}}$,	$\overline{\text{V}}$,	$\overline{\text{X}}$,	$\overline{\text{L}}$,	$\overline{\text{C}}$,	$\overline{\text{M}}$.
1000,	5000,	10000,	50000,	100000,	1000000.

SCHOLION.

144. *Ne vero quispiam minus eruditus existimet, expositam harum notarum originem, & natales, aut lusum ingenii, aut opinionem sua carentem ratione, is quæso consulat scriptores rerum antiquarum, qui lapides, manuscripta, nummos, cæteraque venerandæ antiquitatis monumenta pulcherrima, his notis consignata, erudito orbi reliquerunt*; Vide Cl. Eisenschmid. Disquis. Tab. II. *Et certe, si rogatus fuerit quispiam dare rationem, cur nota literæ* (V) *denotet numerum* quinque, *aut litera* (X) decem, *vel litera* (L) quinquaginta, *litera* (D) quingenta, *litera* (C) centum, *item* (M) mille: *Si originem, & natales harum notarum ignoret, quid roganti erudite reponat, non inveniet; unde liquet, cui fundamento vocum chronographicarum lusus initatur, quarum literæ, si ad natales suos reducantur, litem grammaticis moveant, cæteris vero ænigma intentent, est necesse, ut isthoc:*

I=ONI≡I-\/I≡IAI≡I=I.

TABULA COMPENDIARIA,

Notarum numericarum Hebræis, & Græcis,

scriptoribus usu receptarum in gratiam eorum, qui lectione eruditorum librorum, cumprimis rerum antiquarum notitia delectantur.

Monades, seu Unitat.					Decades.				
Hebr.	*Græc. M.*	*min.*	*mi.*	*vulg.*	*Hebr.*	*Græc. M.*	*min.*	*mi.*	*vulg.*
א	I	α'	α	1	י	Δ	ι'	ι	10
ב	II	β'	β	2	כ	ΔΔ	κ'	κ	20
ג	III	γ'	γ	3	ל	ΔΔΔ	λ'	λ	30
ד	IIII	δ'	δ	4	מ	ΔΔΔΔ	μ'	μ	40
ה	Π	ε'	ε	5	נ	𐅄	ν'	ν	50
ו	ΠI	ς'	ς	6	ס	𐅄Δ	ξ'	ξ	60
ז	ΠII	ζ'	ζ	7	ע	𐅄ΔΔ	ό	ο	70
ח	ΠIII	η'	η	8	פ	𐅄ΔΔΔ	π'	π	80
ט	ΠIIII	θ'	ϑ	9	צ	ИИ	ς'	Ϙ	90

Cen-

Centenarii.

Hebr.	*Græc. maj.*	*min.*	*min.*	*vulgar.*
ק	H	ρ΄	ρ	100
ר	HH	σ΄	σ	200
ש	HHH	τ΄	τ	300
ת	HHHH	υ΄	υ	400
ך	[H]	φ΄	φ	500
ם	[H]H	χ΄	χ	600
ן	[H]HH	ψ΄	ψ	700
ף	[H]HHH	ω΄	ω	800
ץ	[H]HHHH	ϡ΄	ϡ	900

Chiliades, seu Millenarii.

א,	X	,α	α,	1000
ב,	XX	,β	β,	2000
ג,	XXX	,γ	γ,	3000
ד,	XXXX	,δ	δ,	4000
ה,	[X]	,ε	ε,	5000
ו,	[X]X	,ϛ	ϛ,	6000
ז,	[X]XX	,ζ	ζ,	7000
ח,	[X]XXX	,η	η,	8000
ט,	[X]XXXX	,θ	θ,	9000

Myriades, seu decem millenarii.

י,	M	,ι	ι,	10000
כ,	MM	,κ	κ,	20000
נ,	[M]	,ν	ν,	50000
ס,	[M]M	,ξ	ξ,	60000
צ,	[M]MMMM	Ϟ	ϙ,	90000

Cen-

Centum millenarii.

Hebr.	*Græc. maj.*	*min.*	*min.*	*vulgar.*
ק,	ΧΗ,	,ρ	ρ,	100000
ך,	$\overline{\mid\mathrm{XH}\mid}$	,φ	φ,	500000
ם,	$\overline{\mid\mathrm{XH}\mid}$ΧΗ,	,χ	χ,	600000

Et ſic de aliis.

Tres lineæ, quibus aliqua litera circumdatur, eſt figura literæ Π, *quæ cum* 5 *ſignificet, indicat valorem literæ ſibi incluſæ quinquies auctum, ut ex Schemate liquet.*

SCHOLION I.

145. *Si quis ultro progredi voluerit in numeris, modum procedendi facile ex tabula intelliget; ex qua etiam ratio colligendi, & componendi numeros liquet; ſic: ſi quis præſentem annum* 1755 *deſignare vellet per literas Græcas, eum denotare poterit vel majuſculis* Χ$\overline{\mid\mathrm{H}\mid}$ΗΗ$\overline{\mid\Delta\mid}$Π. *vel minuſculis* ,αψʹνε, *aut ſimpliciter* α,ψνε, *item Hebraice*: .א״ןנה,

SCHOLION II.

146. *Præter has in antiquis græcorum monumentis reperiuntur etiam ſimiles numerorum expreſſiones; Ex. gr.* $\smile$ *ſignificat* 1000, *ſupra quam figuram ſi ſcriptæ reperiantur literæ, ita accipiendæ ſunt, ut literæ monadum denotent* decades; *decadum*, centenarios, *centenariorum* millenarios; Ex.gr. *Apud Ptolom. legitur* $\overset{\lambda\alpha}{\smile}$ καὶ ,αψπγ, *id eſt*: 310000, & 1783, *ſimul* 311783. *Item apud eundem* $\overset{\kappa\beta}{\smile}$ δ,χθ, *loco* 224609.

CA-

CAPUT ULTIMUM.

Tyronem manuducens ad praxim, & usum quatuor Algorithmorum Arithmeticæ numerorum integrorum.

USUS ADDITIONIS.

QUÆSITUM I. Quando utendum Additione? ℞. Cum additio sit collectio plurium numerorum partialium in unum totum (§. 30.) constat amplissimum additionis usum in commerciis, conventisque hominum esse, dum rationes *accepti*, & *expensi* reddendæ, aut exposcendæ sunt; Itaque additione utimur, quando indagamus summam acceptorum, aut expositorum, unius septimanæ, vel mensis, aut anni, vel pluriuum etiam annorum generalem summam. *Sic* Ma gister rationum (*vulgo* Perceptor, *aut* Provisor) *rationem inire volens, quantum toto anno perceperit? colligit, aut addit singularia accepta seu hebdomadarum, seu mensium in unam summam, quæ ostendit quantum toto perceperit anno. Per additionem quoque indagamus, quantum per particulares expensas erogatum, aut venditum, vel distractum, aut quoquo modo consumptum sit longiore quovis elapso tempore.*

USUS SUBTRACTIONIS.

QUÆSITUM II. Quando utendum ſubtractione? ℞. Cum per ſubtractionem innoteſcat Reſiduum, ſeu differentia duorum numerorum (§.37.) ſubtractione utimur, quotiescunque indagamus differentiam, vel reſiduum duorum quantorum quorumvis. *Sic* Oeconomus *ex acquiſitis per annum frumenti metretis* 2685 *ſequenti anno partim venum dedit, partim in domeſticas neceſſitates conſumpſit metretas* 1899 (*ut illi ex libro rationum expoſitarum conſtat*) *quærit igitur ante meſſem novam quot metretas adhuc reliquas habeat? ſubtrahendo ergo* 1899, *à* 2685, *reperiet reliquas ſibi adhuc eſſe debere* 786 *metretas; quod tamen reſiduum frumenti, ſi auctuali adhibita menſuratione, cum inito calculo non reſpondeat exacte, neminem aut furti, aut infidelitatis arguat Oeconomus, cum grana frumenti recentis ob humorem nativum turgentia, & menſurata majorem numerum metretarum conficiant, quam tempore diuturno ſiccata, ut nôrunt Oeconomi; quod etiam in liquidis obſervandum occurrit.*

Sic quoque Paterfamilias *rationem inire volens perceptæ ex cenſu annuo, rebusque Oeconomicis pecuniæ,* Ex gr. 3427 *fl. Ger.* 45. *xr. cum expoſita eodem anno pecunia*

3342 *fl. Germ.* 55 *xr. per ſubtractionem inquirit in reſiduam pecuniam, quam in dato exemplo reperiet eſſe* 84 *fl. Germ.* 50 *xr. unde liquet & hujus algorithmi uſus per omnem vitam civilem ampliſſimns.*

USUS MULTIPLICATIONIS.

QUÆSITUM III. Quando utendum multiplicatione? ℞. Cum multiplicatio ſit ejusdem numeri ad ſeipſum toties facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet (§.46.) patet, & hujus algorithmi uſum frequentiſſimum eſſe in commercio humano; nam multiplicatione utendum eſt, quotiescunque indagamus ſummam, ſeu quantum, quod conſurgere debet ex repetita ejusdem numeri ad ſeipſum facta additione: *Ex.gr.* Præfecto annonæ *experientia conſtat juxta præſcriptam normam in* 2000 *Milites ſingulis menſibus diſtribui farinæ metretas* 768, *quærit pro toto anno, ſeu per menſes* 12, *quot metretas erogaturus eſt in eosdem* 2000 *milites; addit ergo* 768 *metretas ſibimet duodecies, ſeu per* 12, *qui eſt menſium numerus, multiplicat* 768 *metretas, & factum* 9216 *dabit metretas intra annum* 2000 *militibus diſtribuendas.* Item Proviſor rei œconomicæ *habet unum agrum, ad quem conſerendum ſiliginis metretas inſumit* 16, *habet autem alium agrum, quin-*

quies

quies majorem isto, quærit, quot metretis ejusdem frumenti ad conserendum illum agrum opus habeat, multiplicat igitur 16 *per* 5, *&* *factum* 80 *indicat numerum metretarum, quibus opus habet ad conserendum agrum quinquies majorem priore.*

USUS DIVISIONIS.

QUÆSITUM IV. Quando utendum divisione? ℞. Præter innumeros fere casus divisione in vita communi utimur, quoties inquirimus in partem unam, quæ emergere debet, si certa summa in plures partes æqualiter, vel inæqualiter partienda sit. *Ex. gr. Habeo legatam summam pecuniæ* 360 *fl. Germ. in* 24 *pauperes æqualiter erogandam, quæritur, quot floreni singulis pauperibus dandi sunt? dividendo itaque numerum* 360 *per* 24, *prodibit quotus* 15 *fl. Germ. quæ est pars vigesima quarta de* 360 *flor. danda singulis pauperibus.* Item Præfectus annonæ *notum sibi habet, quod in* 2000 *milites spacio unius anni, seu* 12 *mensium, erogatæ sint* 9216 *metretæ frumenti, quærit, quot singulis mensibus aut erogatæ sint, aut erogari debeant? dividendo itaque* 9216 *per* 12, *emergit quotus* 768 *metretæ, spacio unius mensis erogatæ, aut erogandæ. Item cuipiam civitati impositum est quantum pecuniæ in ærarium Regium conferendæ* 7620 *fl. Ger.*

reperiuntur autem cives esse 1524, *quæritur, quid singuli conferre debeant? dividendo itaque* 7620 *per* 1524, *emergit quotus* 5, *seu totidem floreni à singulis civibus æqualiter conferendi.*

SCHOLION.

Cæteros fere innumeros horum algorithmorum per omnem Mathesim, Philosophiam naturalem, ac vitam socialem usus, docentis institutioni, & discipulorum industriæ in datis circumstantiis usurpandos relinquimus potius, quam ut iis hic loci referendis, molem augendo, libellum pretiosum nonnullis Tyronibus reddamus. Porro hæc, quæ de algorithmis numerorum integrorum à nobis dicta sunt, reliquorum omnium, quæ per universam arithmeticam traduntur, fundamenta, atque elementa esse, quisque facile assequetur, cum nihil aliud in quæstionibus arithmeticis præcipiendum sit, quam, ut numeri vel addantur, subtrahanturve, *aut* multiplicentur, dividanturve. *Itaque, nisi Tyro, in his algorithmis probe sit exercitatus, frustra se se ad alia conferet, quæ ad Gloriam DEI Majorem ex bono Patriæ, ac vitæ civilis commodo consequendam, tradituri sumus.*

FINIS ARITHMETICÆ Numericæ integrorum.

INDEX PROBLEMATUM.

PARTIS I.

De Natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

PARTIS II.

De Logistica decimali Geometrarum.

PARTIS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas Numericas.

O. A. M. D. G.

PRÆFATIO.

ALgorithmis quatuor Arithmeticæ numericæ instructo Tyroni Prima Algebræ principia traditurus, ad summum scientiarum apicem aditum pando. Est hæc scientia inter Mathematicas hujus Ævi præcipua, ac nobilissima, quæ methodo Analytica veritates Mathematicas quantumlibet ignotas, & intricatas sagacitate mira feliciter detegit, explicat, invenit, inventas stricto compendio clarissime demonstrat, inque methodum Syntheticam non sine legentium admiratione ordinat. Hujus scientiæ tanta quorundam Mathematicorum animis insedit æstimatio, ut Divinam appellarent propterea, quod à sensuum cognitione longe remotissima perscrutando, nullis numerorum, aut mensurarum finibus, nulla magnitudinum mole conclusa per omnem, qua late patet veritatum Mathematicarum, rerumque naturalium campum diffusa quidquid Quantum audit, sibi proprium faciat, eaque facilitate abstrusa quæque pandat mysteria, ut oracula fundere videatur.

Mirandam hanc artem munere DEI veteribus quoque usitatam fuisse (cujus ope Theoremata, ac Problemata invenerint) quamque ipsi, ut eo major subiret alios inventorum admiratio, studiose dissimulaverint, Græcum de Arithmetica testatur opus à Diophanto Alexandrino conscriptum, signisque consignatum Algebraicis. * Nec immerito

* Floruit Alexandriæ *Diophantus Mathem.* seculo post Christum natum secundo, scripsit 13. de Algebra libros, quorum 6. tantum hodie supersunt à *Xylandro* latinitate donati, hos primis Typis Anno 1575. in lucem datos subinde *D. Casparus Bachet* commentariis suis Anno 1621. editis, auxerat.

scientia hæc veteribus nullo non æstimanda pretio, tanquam summus mathematum Thesaurus secreti silentio tecta, paucisque discipulorum, (ut opinor) concredita, studiose custodienda curabatur, cujus finem, ac scopum esse nôrant, quantitatem, sub quibusvis quæstionis etiam difficillimæ involucris delitescentem, ex levissimis, ac obviis indiciis (ut ita dicam) subodorari, tantisque veritatum certissimarum divitiis, quasi aliud agendo Philetis Sui *paucarum horarum laborem levissimum remunerari, quas arte Synthetica, summo etiam ingenio præcellens, labore maximo vix unquam satis assequeretur.*

Quapropter Recentiores hac arte beati, vim ejus mirandam in perscrutandis, determinandisque naturæ phænomenis fausto successu experti, Philosophica sua circa res naturales dogmata Algebraicis expressa formulis proposuêre, probe gnari, unicâ sæpe lineâ Algebraicis rite signata figuris, tot tantaque naturæ mysteria declarari, quibus explicandis (si verbis uterentur) complures paginas conscribendi necessitatem sibi imponerent.

Quæ cum ita sint, Matheseos juxta, ac Philosophiæ Recentiorum Studiosus diligentem scientiæ huic operam navet, oportet, qua adjutus non sinè sincera voluptate animi ea reperiet Marte suo, quæ è veterum libris magna & temporis, & scientiæ jactura vix hauriet sine tædio, itaque secum statuat velim Tyro Analyseos, tantum se profecturum in Mathematicis, ac Philosophia naturali, quantum exercitatus fuerit in Algebra Geometriæ juncta, cujus prima principia duntaxat Recentiorum more, ad captum Tyronum methodo clara in DEI Gloriam concinnata, isthic propono. Velim autem ea sibi in memoriam revocet Tyro monita, quæ Elementis Arithmeticæ præmiseram.

CON-

CONSPECTUS
PARTIUM, ET CAPITUM
Algebræ.

PARS I.

De Arithmetica literali, seu Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.

PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

PARS

PARS III.

De Analysi speciosa, seu arte resolvendi Problemata, & Quæstiones quantumvis reconditas.

PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulæ Aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

ELEMENTA
ARITHMETICÆ
NUMERICÆ, ET LITERALIS,
PHILOSOPHIÆ
NATURALI
ANCILLANTIA,

AD

Præfixam in Scholis noſtris normam

Concinnata

A P. MAXIMILIANO HÖLL,

e S. J. Philoſophiæ Doctore, Matheſeos

Prof. Publ. & Ord.

IN ACADEMIA S. J. CLAUDIOPOLITANA

TRANSYLVANIÆ.

CLAUDIOPOLI,

TYPIS ACADEMICIS S. J. ANNO 1755.

DUM
ASSERTIONES
EX
UNIVERSA LOGICA,

IN ALMA, AC REGIO-PRINCIPALI
SOCIETATIS JESU
ACADEMIA CLAUDIOPOLITANA
ANNO ſalutis 1755. Menſe Die
Publice propugnaret

SPECTABILIS, ac PERDOCTUS
DOMINUS
PAULUS BARCSAI,
Ex Comitatu Hunyadienſi,
DE NAGY-BARCSA, è CONV. NOB.

EX PRÆLECTIONIBUS
R. P. DOMINICI
GRIENNER,
e Soc. Jesu
AA. LL. & Philoſophiæ Doct. ejusdemque Profeſſoris Publici, Ordinarii.

AUDITORIBUS OBLATA.

HONORIBUS

ILLUSTRISSIMI,

ac REVERENDISSIMI

DOMINI, DOMINI

MATHIÆ

DE

SALBECK,

PROTHONOTARII APOSTOLICI,

ABBATIS

S. HENRICI.

CAPITULI CATHEDRALIS ECCLESIAE

CAROLINO-ALBENSIS

PRÆPOSITI MAJORIS.

DOMINI, DOMINI

SUI GRATIOSISSIMI.

ILLUSTRISSIME,

AC

REVERENDISSIME

DOMINE!

NE mirum videatur, quod TUO nomini, primas Philosophiæ meæ positiones dicaverim; ad hoc me impulit singularis TUUS in me animus, quo prima literarum elementa discentem prosequutus es; impulit quod ILLUSTRISSMÆ Familiæ TUÆ acceptum ferre debeam me ipsum, quem seu in liberalibus disciplinis, seu pietate, & erga supremum Numen religione, cura non mediocri diversis in locis

im-

imbuit, educavit; accedunt innumera alia de me merita, quæ recensere, & exigua hac pagina comprehendere minime possum: hæc omnia dum simul mihi ob oculos pono, peculiarem certe à me gratitudinem exposcunt; meliorem autem, quam aliam præstitero, quam si primos Philosophiæ novæ fructus TIBI mecum offeram, ut quos ex tenello sperare tantum poteras, hos nunc, ut primitias, primus ipse TU decerpas; exigui quidem sunt, sed vel ideo Chari, quod Sapientia TUA ex his, quales aliquando futuri ſint, perſpicere poſſit; patere igitur hos tibi à me conſecrari, qui prius temet mihi totum conſecraſti. Deus optimus maximus TE mihi, Patriæ, Religioni quam diutiſſime conſervet. Sic voveo.

ILLUST. ac REVER.

DOMINATIONIS TUÆ

Cliens infimus

PAULUS BARCSAI.

THESES
EX
UNIVERSA LOGICA.

I.

LOgica eſt facultas directiva operationum intellectus, ars, & ſcientia, ad alias in ſtatu perfecto acquirendas tantum utilis, hujus objectum materiale ſunt ideæ, formale earundem rectitudo. Idea porro eſt ſimplex rei perceptio, eſtque triplex innata, adventitia, factitia; innata cognoſcimus res ſpirituales.

II.

Alia item eſt idea intuitiva, alia abſtractiva, per quam fit præciſio objectiva, qua attributa ejusdem individui inter ſe diſtinguuntur, non autem diſtinctione reali, aut media inter realem, & rationis.

III.

Dum mens ideas aut componit per affirmationem, aut dividit per negationem dicitur judicare; judicium autem eſt ſimplex actus mentis, nec poteſt idem actus judicii eſſe ſimul ſcientificus, & probabilis.

VI.

IV.

Propoſitionibus manifeſtamus interna mentis noſtra judicia, hinc propoſitio eſt oratio, in qua unum de alio affirmando, vel negando enunciatur, de futuro contingenti eſt in ſe determinate vera, vel falſa.

V.

Raciocinatio ex nota duarum idearum inter ſe habitudine tertiam, quæ ante ignorabatur, colligit, admiſſis tamen præmiſſis etiam evidentibus poteſt omitti exercitium concluſionis. Principium generale legitimus ne ſit Sylogiſmus eſt: ſi una præmiſſarum Sylogiſmi concluſionem contineat, altera vero palam efficiat concluſionem in illa contineri.

VI.

Actus ille quo intellectus ideas, judicia, & raciocinationes ſuas, ſeu diſcendi, ſeu docendi cauſa, certum in ordinem digerit, methodus appellatur, hæc eſt operatio mentis diſtincta, ſi talis eſt diſcurſus. Univerſale principium, & primum omnis ſcientiæ eſt ſequens: Quidquid in idea clara, & diſtincta rei alicujus relucet, id de ea affirmari poteſt.

O. A. M. D. G.

$$a : b = c : x$$
$$a\,x = bc$$
$$x = \frac{bc}{a}$$

ELEMENTA ALGEBRÆ PARS I.

DE ARITHMETICA LITERALI, SEU *Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.*

CAPUT I.

Hypotheses, & Definitiones in Algebram universam.

DEFINITIO I.

1. A*lgebra* est scientia, quæ ope literarum alphabeti, & certis adhibitis signis per regulas sibi proprias inquirit in quantitates, & veritates ignotas, easque ex datis quibusdam cognitis secundum axiomata *Æqualitatis*, infallibiliter eruit, ac demonstrativè deter-

minat. Dicitur etiam *calculus universalis*, quia literæ universaliter significant quamcunque quantitatem, pro qua significanda assummuntur.

SCHOLION.

2. *Dividitur* Algebra *in* Arithmeticam literalem, *seu* speciosam, *&* *in* Analysim subliniorem; Illa, *substitutis loco numerorum literis, in naturam numerorum, & veritates Arithmeticas* universaliter *inquirit*, Hæc *quantitates quasvis finitas, & mensurabiles per universam Mathesim, ac Philosophiam vagantes eruit, demonstrat, ac regulas universales invenit, & statuit. Prior illa, si numeris (non substitutis literis) utatur, appellatur etiam* Algebra numerosa.

DEFINITIO II.

3. *Quantitas* dicitur, quidquid addendo augeri, aut subtrahendo minui potest. *Quantum* verò appellatur, quod constare partibus intelligitur; harum respectu vocatur etiam *Totum*.

HYPOTHESIS I.

4. *Literæ Alphabeti minusculæ substituuntur in Algebra pro* quantitatibus ; *& quidem literæ alphabeti priores*, Ex. gr. a, b, c, *&c. adhibentur pro quantitatibus nobis* notis, *&* cognitis. *Ultimæ vero* x, y, z, *pro* ignotis, *seu* quærendis, *&* determinandis *usurpantur.*

SCHOLION I.

5. *Cum* quantitatis *nomine intelligatur quidquid augeri vel minui potest* (§. 3.) *literæ alphabeti non tantum pro numeris, sed etiam pro lineis, areis, corporibus, & universim pro omni quantitate substitui*

pos-

possunt; Utiliter autem quantitates cognitæ per primas, ignotæ per ultimas alphabeti literas exprimuntur, ut imaginationi, ac memoriæ distinctè exhibeatur quantitas, cui inquirendæ per datas regulas insistit operans. Sunt, qui, ut memoriæ, & imaginationi adhuc melius subvenirent, literis utuntur initialibus eorum nominum, per quas, quantitates tanquam cognitæ denominantur. Ex. gr. Locò datæ quantitatis cognitæ Temporis, ponunt literam T, locò ponderis P, locò milliarium M, locò celeritatis C, &c. quod laudibile Recentiorum inventum etiam nos in Algebra ad Geometriam applicata sequemur; Ignotas tamen, seu quærendas quantitates non aliter, quàm per ultimas literas x, y, z, appellabimus. Vieta post antiquiores Algebræ restaurator, & inventor usus est literis majoribus alphabeti, alii cum Anglis secuti Harriotum incognitas quantitates per vocales, cognitas per consonantes exprimebant. Literis minusculis usus est Cartesius, cujus praxim hodierni ferè omnes sequuntur præter Anglos quosdam.

SCHOLION II.

6. Quoniam literæ substituuntur pro quacunque quantitate (§. 4.) eæque sic substitutæ, universaliter significant illam quantitatem, pro qua substitutæ sunt (§. 1.) sequitur calculum literalem Algebræ, esse calculum quantitatum indeterminatarum; non quidem in hoc sensu, quasi talis quantitas in se non esset determinata, & certa, sed quod relatè ad unitatem (quæ nobis arbitraria est) per quam determinatur talis quantitas, non sit determinata, eò quod unitas non supponatur determinata; determinata autem unitate, & ipsa quantitas determinata intelligitur. Sic, si litera a significet altitudinem Ex. gr. montis, aut turris, hæc litera a significare potest altitudinem magnam, aut parvam, mensurabilem per perticas, aut pedes, aut tantum per digitos, & hoc modo dicitur quantitas a indeterminata; si verò supponatur altitudo a, Ex. gr. montis, esse centum pedum, determinata habetur unitas nempe pes, à qua determinata, determinatur quoque quantitas altitudinis a. Et in hoc sensu calculus literalis, dicitur calculus universalis, seu indeterminatorum, vimque obtinet regulæ, ac Theorematis universalis, quidquid per literas ritè expressum habetur, ut inferius declarabitur.

SCHOLION III.

7. *Ut Tyronibus* (*qui usu idearum universalium destituti in primis Algebræ algorithmis*, *&* *principiis*, *nescio*, *quas tenebras experiri solent*, *aut è præjudiciis aliorum sibimet monstrosa mysteria fingunt*) virtus, *ac non satis laudanda* vis universalis *Algebræ ob oculos ponatur*; *paritate desumpta ex Arithmetica numerica*, *ut puto*, universalitatem, *&* indeterminationem *quantitatum literis alphabeti expressarum*, *ad captum declarabimus. Itaque*, *quemadmodum in Arithmetica numerica*, signa, *seu* notæ numericæ puræ, *&* abstractæ *ab omni materia* Ex. gr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, *&c.* *significant suo modo* universaliter, *&* indeterminatè *omnem numerum mixtum*, *&* *concretum*, Ex. gr. *numerus* purus, *&* abstractus 5, *significare potest* 5 studiosos, *vel* 5 domos, *vel* 5 libros, *aut* 5 urnas vini, 5 perticas, 5 ulnas *&c. ita pariter* (*imò magis universaliter*) *literæ alphabeti pro quantitatibus in Algebra usurpatæ*, *ac substitutæ*, *significant* quantitatem universaliter, *ac* indeterminatè, *ut* exemplum in priore scholio adductum declarat; *Et verò quid magis universaliter significare potest*, *quam litera* a, *aut* b, *denotans* Ex. gr. lineam, *quæ cum multorum milliarium longa*, *aut tam brevis esse possit*, *ut unius*, *alteriusve capilli latitudinem vix excedat*, *certè litera hujusmodi magnam æquè*, *ac parvam denotabit*, *aut significabit lineam. Et hinc*, *sicut numerus* purus Ex. gr. 5. *ante applicationem ad materiam erat* signum, *seu* nota universalis *quinque unitatum suo modo* indeterminatarum, *applicatus vero ad materiam* Ex. gr. *urnas vini*, *jam* determinatus *evadit*; *ita litera alphabeti* Ex. gr. a, *aut* b, *substituta pro significanda quantitate lineari*, *significat universalitèr omnem longitudinem lineæ*, *assumpto autem determinato numero* Ex. gr. *perticarum*, *cujus* unitas (*nempe pertica*) *determinata intelligitur*, *jam determinata evadit quantitas per literam prius universaliter indicata*; *Aut quemadmodum in dialectica vox* domus *significat omne ædificium habitabile*, *atque* indeterminatè *significat domum vel religiosam*, *vel secularem*, *aut rusticanam*, *&c.*; *&* *per adjectam vocem aliquam determinantem ad certam speciem.* Ex. gr. Principis, *primò restringitur*, *ita etiam litera pro quantitate substituta*;

hoc

hoc ſolum diſcrimine, quod dialectico (propter communem hominum inſtitutionem) voce domus, *uti non liceat ad ſignificandum* Ex. gr. calamum, *liceat autem utenti Algebrâ, per literam* a Ex. gr. *ſignificare, & denominare vel lineam, vel numerum, vel milliare &c. non ſecus, atque in arbitrio Parentis eſt, nato ſibi filio imponere nomen Petri, aut Joannis, aut Stephani, &c.*

AXIOMA I. FUNDAMENTALE.

8. Quantitas, quæ ſub conſiderationem, & calculum Algebraicum aut Mathematicum cadere poteſt, triplex conſtituitur: 1. Quantitas *poſitiva*, vel *affirmativa*, quæ etiam *major nihilo* dicitur. 2. Quantitas *nulla*, aut *æqualis nihilo*. 3. Quantitas *negativa*, aut *minor nihilo.*

DECLARATIO AXIOMATIS FUNDAMENTALIS.

Primo: Petrus *Ex. gr.* habet florenos 8, nullique hominum tenetur, aut debet aliquid; hi 8 floreni relatè ad Petrum poſſeſſorem ſunt quantitas *poſitiva*, *realis*, & *affirmativa*, atque *major nihilo*, cum plus habeat, quam nihil.

Secundo: Habeat Petrus tantùm 8 florenos, teneatur autem ex debito hos 8 florenos, ſeu totidem Joanni, tali caſu, ſi Petrus Joanni det hos 8 fl. intelligetur habere nihil, id eſt quantitatem *nullam*, ſeu *æqualem nihilo:*

Tertio: Habeat Petrus 8 florenos, teneatur autem Joanni flor. 10, tali caſu, ſi

Petrus Joanni det hos 8 flor. tenebitur adhuc 2 florenis, qui 2 flor. sunt quantitas *negativa*, & *minor nihilo*, cum ad hoc, ut Petrus nihil habeat, requirantur adhuc 2 floreni positivi, quos tenetur Joanni, iisque habitis, & redditis Joanni, primùm intelligetur Petrus habere nihil.

SCHOLION I.

9. *Sunt, qui axioma hoc fundamentale declarant per motum progressivum hominis;* Ex. gr. *Statue te medium inter portam, & fenestram oppositam portæ tui cubiculi, & esto tibi negotium aliquod peragendum extra cubiculum, ad quem finem obtinendum necesse est, te propinquum fieri portæ, ut per eam exeas. Itaque* 1mo: *si e medio cubiculi, in quo consistis, duos passus versus portam facias, diceris, facere duos passus* positivos, *quia conducunt ad tuum finem, extra cubiculum egrediendi.* 2do: *Si verò in medio consistens quietus maneas, id est, nec versus portam, nec fenestram versus ullum passum facias, habebis motum* nullū, *id est, quantitatem* nullam *motus progressivi portam versus.* 3tio: *Si ex medio non portam versus (per quam te exire necesse est) sed versus fenestram duos passus retrò facias, diceris fecisse duos passus* negativos, *respectu nempe habito ad exitum per portam, cum non appropinques portæ, sed ab ea magis elongeris, atque ad hoc, ut ex medio portam versus non processisse dicaris, necesse est, te per duos passus ad medium redire cubiculi, in quo consistens, deprehendes, te nihil magis portæ appropinquâsse, quàm si ibi quietus mansisses.* Cl. Jo. Poëtius *explicat per motum progressivum hominis in navi à prora ad puppim progredientis dum interea navis secundo fluvio defertur. Nobis tamen prima declaratio, utpote magis ad captum Tyronum, placet præ cæteris.*

SCHOLION II.

10. *Tyrones axioma hoc fundamentale* (§. 8.) *altè menti imprimant, & omnem quantitatem, quæ per decursum Algebræ occurret, per modum illorum* 8, *&*

10 florenorum considerare assuescant, ex qua consideratione maxima tum intelligendi, tum operandi facilitas in Algebra dependet.

HYPOTHESIS II.

11. *Signum Algebraicum indicans quantitatem aliquam esse* positivam, *vel* affirmativam (§. 8.) *aut* majorem nihilo, *est præfixa quantitati datæ crucula hujusmodi* (+) *minor, & enunciatur per vocem:* plus, *sic:* + a, *significat quantitatem* a *esse* positivam, *& enunciatur;* plus a. *Similiter;* a + b, *enunciatur;* a plus b. *Signum quantitatis* negativæ (§. 8.) *aut* minoris nihilo, *est lineola* (−) *præfixa, & enunciatur per vocem* minus; Ex. gr. *sit*, a − b, *dic*, a minus b. *Signum quantitatis* nullius (§. 8.) *est zerus* (o), *qui, cum nullam* quantitatem *significet, præfigi non solet literis, sed tantum inservit in problematibus reductis ad* nihilum, *ut locum unius partis æquationis occupet*, ut infra dicetur.

SCHOLION I.

12. *Signa hæc* +, *&* − *afficiunt tantum illas quantitates, aut literas, quibus præfiguntur, nec ultra suam vim exerunt.* NB. Si initio alicujus calculi literalis nullum *expresse* præfigatur signum, semper intelligatur *tacitè* præfixum esse signum +, idque ex institutione hominum, adeoque illam quantitatem primam, esse positivam.

SCHOLION II.

13. *Quantitas* negativa, *seu quæ præfixum habet* (−) *signum hoc, non in eo sensu accipienda est, esse*

negativa, *quasi esset* non ens, *aut quid imaginarium, existens tantum in cerebro Mathematicorum, sed reipsa est quantitas realis quidem, & existens, sed quæ tantum suam* præsentiam *hic & nunc negat, id est. pro his certis circumstantiis præsens esse non intelligitur, tanquam non conducens ad finem intentum. Exemplum habes (in* §.9.) *de duobus passibus fenestram versus factis, qui utique* reales, *&* existentes *intelliguntur, sed solum sunt* negativi *relatè ad finem intentum, exeundi nempe per portam, ad quem finem tanquam non conducentes,* præsentiam *suam negant, id est, negativi evadunt respectivè tantum ad datas circumstantias, licet in aliis circumstantiis positivi esse possint,* Ex. gr. *si consistens in medio cubiculi fenestram aperire velis.* Non *secus duo illi floreni* negativi (*in* §. 8.) *quos propter debitum* 10 *florenor. supra* 8 *flor.* positivos *persolvere tenetur* Petrus Joanni, *tantum* non præsentes *intelliguntur relatè ad Petrum, etsi alibi* reales *sint, &* existant, *atque seclusa circumstantia debiti, etiam relatè ad Petrum esse possint* positivi, *id est,* præsentes. *Itaque quantitatem esse* negativam, *est,* non negare existentiam, sed præsentiam *quantitatis pro datis circumstantiis.*

HYPOTHESIS III.

14. *Loco vocis* æqualis, *vel* æquale, *per quam indicamus* æqualitatem *duarum, vel plurium quantitatum, in Algebra usurpantur hæc signa,* (⊐) *vel* (::) *aut* (∞); *inter quantitates* æquales *posita.* Ex. gr. *Si volumus indicare quantitatem* a *esse æqualem quantitati* b, *scribatur sic*, a ⊐ b, *aut* a :: b, *vel* a ∞ b, *& enunciatur*, a æquale b, *ita* 7 :: 7, *dic*, 7 æquale 7.

HYPOTHESIS IV.

15. *Signum* Majoritatis *est* (⊳); *signum verò* Minoritatis (⊲) *indicans duarum quantitatum eam esse* minorem, *versus quam*

quam cuspis porrigitur, alteram verò majorem. Ex. gr. a $>$ b, *enunciatur*; a est majus quàm b, *item* b $<$ a, *enunciatur*; b est minus quàm a, *eodem modo*; 8 $<$ 12, *dic*, 8 est minus quàm 12; *aut*, 12 $>$ 8, *dic*, 12 est majus quàm 8.

SCHOLION.

16. *In Algebra etiam per certa signa ipsæ quoque operationes, seu Algorithmi indicantur, uti sunt:* Additio, subtractio, multiplicatio, divisio, extractio radicis, proportionis &c.

HYPOTHESIS V.

17. *Signum* Additionis, *seu* collectionis *est* (+) *præfixum quantitati additæ, & enunciatur per vocem;* Plus. Ex. gr. *Summa duarum quantitatum* a & b *indicatur, aut scribitur ita*, a+b, & *enunciatur;* a plus b, *hoc est:* ad quantitatem a addita est quantitas b. *Quod si* Ex. gr. 8 *vocetur* a, & 5 *vocetur* b, *quantitas* a+b *significabit summam* 8+5 $=$ 13.

HYPOTHESIS VI.

18. *Signum* subtractionis, *seu* diminutionis *est lineola* (−) *præfixa quantitati subtrahendæ, & enunciatur per vocem;* Minus, Ex. gr. *Residuum, aut differentia duarum quantitatum* a & b, *indicatur, aut scribitur ita*, a−b, & *enunciatur*, a minus b, *hoc est:* ex quantitate a ablata, *aut* subtracta est quantitas b. *Quod si* Ex. gr.

8 *vocetur* a, & 5 *vocetur* b, *significabit residuum* a—b *idem quod* 8—5, *id est*, 3.

COROLLARIUM.

19. Quoniam + est signum *Additionis*, simulque signum quantitatis *positivæ* (§. 11.) hæc verò — est signum *subtractionis*, & simul signum quantitatis *negativæ* (§. 11.) quantitas autem *positiva*, & *negativa*, itemque *additio*, & *subtractio* sibi contrariè opponuntur (§. 121. Arithm.) patet quantitates duas, quarum una habet signum +, altera signum — præfixum, esse sibi *contrarie* oppositas, & invicem *destructivas*; hinc signa + & — vocantur etiam *signa contraria*, & quantitates his affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Ex qua hypothesi manifestum est sequens axioma fundamentale.

AXIOMA II. FUNDAMENTALE.

20. Quantitas positiva cum quantitate negativa *æquali*, æquatur *nihilo*, seu *zero* (0), id est, se invicem totaliter destruunt, sic: $a - a = 0$, aut $-a + a = 0$ seu si 4 valeat a, erit $4 - 4 = 0$, aut, $-4 + 4 = 0$.

COROLLARIUM.

21. Si quantitas *positiva* major est quantitate *negativa* sibi conjuncta, tali casu, quantitas *negativa* tantam partem destruit ex *positiva*, quantam ipsa *negativa* indicat; & vicissim, si quantitas *negativa* major est quantitate *positiva* sibi conjuncta, quantitas *positiva* tantum destruit ex *negativa*, quantum *positiva* se habere indicat. *Ex. gr.* Sit quantitas + 8, & altera — 5, cum sit $8 > 5$, erit; $8 - 5 = 3$, id est, quinque unitates *negativæ* ex 8 *positivis* destruunt quinque uni-

unitates; & iterum, sit quantitas $+5$, & altera -8, erit $-8+5=-3$. Quia quinque *positivæ* unitates, destruunt ex 8 negativis quinque, unde remanent tres *negativæ*. Ut patet ex (§. 8.)

DEFINITIO III.

22. *Quantitas incomplexa*, aut *monomia*, vocatur quævis quantitas seorsim sumpta, id est, non conjuncta cum altera quantitate per signa $+$ vel $-$ interposita; *Ex. gr.* a, vel b, aut c, item ba, vel cba, aut dfc &c.

DEFINITIO IV.

23. *Quantitas complexa*, aut *Polynomia*, dicitur, cum duæ vel plures quantitates interpositis signis $+$ vel $-$ sibi junguntur; *Ex. gr.* $a+b$, aut $a-b$, vel $a+b+c$; item: $ba+c-ad$ &c.

SCHOLION.

24. *Quando duæ quantitates per signum* $+$ *vel* $-$ *conjunguntur;* Ex. gr. $a+b$, *vel* $a-b$, *aut* $ad+bc$ *&c. hujusmodi* complexa quantitas *vocatur*, Binomia, *id est:* (duarum partium) *Si* tres, Ex. gr. $a+b+c$, *vel* $a-b+c$, *&c. vocatur* Trinomia; *si* quatuor, Ex. gr. $a+b-c+d$, *&c. dicitur* Quadrinomia. *In genere, si plures per signa* $+$ *vel* $-$ *jungantur, appellatur quantitas complexa* Polynomia.

HYPOTHESIS VII.

25. *Signa Algebraica* multiplicationem *quantitatum indicantia, sunt:* Primo: *usitatissimum signum est, si factores absque ullo signo interposito sibi connexi scribantur,*

tur; Ex. gr. *Si volumus indicare productum, quod ortum est ex multiplicatione duorum factorum* a *&* b, *scribatur*, ba, *vel* ab; Secundo: multiplicationem *indicat punctum* (.) *inter factores interjectum, aut duæ lineæ decussatæ* ($\times$) *interpositæ*. Ex. gr. a.b, *vel* a$\times$b, *& enunciatur*, a est multiplicatum per b;

Hoc ultimo ($\times$) *signo nos rarò utemur.*

SCHOLION.

26. *Itaque si* Ex. gr. a *valeat* 8, *&* b *valeat* 3, *erit productum ex* a *per* b; *id est*: ab = 24, *item* a.b = 8.3 = 24, *aut* a $\times$ b = 8 $\times$ 3 = 24. *hoc est* productum 24, *quod factum est ex* factoribus 8 *&* 3, *indicari potest per signa, vel sic*: 8.3, *vel* 8 $\times$ 3, *quæ significant* multiplicationem. *Adhibent etiam aliqui pro signo multiplicationis* comma (,) *sed minus rectè propter confusionem typi; nos* commate *pro signo multiplicationis nunquam utemur, sed sufficiat insinuâsse, ne erroris Typographos arguamus, cum pro signo multiplicationis* comma *positum legerimus.*

HYPOTHESIS VIII.

27. *Si multiplicatio quantitatis polynomiæ per monomiam, & vicissim, item multiplicatio quantitatis polynomiæ per polynomiam indicanda sit, quantitas polynomia parenthesi includatur, & alteri quantitati vel cum, vel sine signo multiplicationis* (§. 25.) *jungatur.* Ex. gr. *Sit indicanda multiplicatio ex factore* a+b−c *in factorem* d; scribatur (a+b−c) d, vel d (a+b−c) vel interjecto puncto

(a

$(a+b-c).d$, vel interjecto $\times$ ſigno, $(a+b-c)\times d$, ſeu $d\times(a+b-c)$, *ſit item indicanda multiplicatio quantitatis* polynomiæ, $a+b-c$, *per polynomiam* $d+f-m$; ſcribatur: $(a+b-c)(d+f-m)$ vel $(a+b-c).(d+f-m)$, aut etiam $(a+b-c)\times(d+f-m)$.

SCHOLION I.

28. *Vulgo, exempla à nobis expreſſa ita etiam ſcribuntur;* $\overline{a+b-c},d$; vel $\overline{a+b-c}.d$, aut $\overline{a+b-c}\times d$, *item exempla noſtra polynomiorum vulgo ſic exprimuntur:* $\overline{a+b-c}.\overline{d+f-m}$, aut $\overline{a+b-c}\times\overline{d+f-m}$; *in quibus* notandum; *quod ſi ſuperducta linea non omnes quantitates includat;* Ex. gr. $a+\overline{b-c}\times\overline{d+f}$, *intelligi debet, illas quantitates, ad quas linea ſuperducta non porrigitur, non eſſe multiplicatas per cæteras, uti in hoc exemplo eſt quantitas* a, *quæ non intelligitur multiplicata per* $\overline{d+f}$, *ſed ſolum quantitas* $\overline{b-c}$; *quia linea ſupra* $\overline{b-c}$ *ducta, non extenditur ſupra quantitatem* a. *Unde, quia per ductum hujusmodi lineæ facilè error committi poteſt, tutius erit uti parentheſi, & ab uſu hujuscemodi expreſſionis abſtinere, niſi caſus* ſcholii ſequentis *urgeat.*

SCHOLION II.

29. *Contingit non nunquam, ut per ſigna* (§. 27.) indicatam *jam duorum factorum* multiplicationem *per novum tertium factorem aliquem, multiplicatam eſſe, indicare cogamur; tali caſu, ſuper priori modo indicatam multiplicationem linea ducenda erit, quæ indicet, an uterque factorum prioris expreſſionis, an unus aliquis tantum per novum tertium factorem multiplicatus ſit.* Ex. gr. *Sit quantitas, quæ jam eſt expreſſa per ſigna multiplicationis hæc:* $(a+b-c).(d+f-m)$ *denuò ſuper indicanda, eſſe tota multiplicata per novum*

fa-

factorem; n + u. scribatur sic: $\overline{(a+b-c).(d+f-m)\times(n+u)}$, vel sic: $\overline{(a+b-c).(d+f-m)}\times\overline{n+u}$. *Quodsi linea super unum ex factoribus ducta non sit, intelligendum est, illum non esse multiplicatum per tertium novum factorem;* Ex. gr. *Si scribatur:* $(a+b-c).\overline{(d+f-m)}\times\overline{n+u}$, *vel sic:* $\overline{(a+b-c)}.\overline{(d+f-m)}\times n+u$; *Vulgo hæc exempla sic exprimuntur:* $\overline{\overline{a+b-c}.\overline{d+f-m}}\times n+u$, *vel etiam hoc modo:* $\overline{a+b-c}.\overline{d+f-m}\times\overline{n+u}$, *aut* $\overline{\overline{a+b-c}.d+f-m\times n}+u$; *sed hæc Tyronibus insinuásse sufficiat, cum ejuscemodi exempla rarius occurrant.*

HYPOTHESIS X.

30. *Signa Algebraica* Divisionem *indicantia sunt* Primo: *usitatissimum signum est, si indicetur per modum* fractionis, *id est, si* dividendus *subducatur linea, & infra lineam scribatur* divisor; Ex. gr. *Indicare volumus quantitatem dividendam* a *esse divisam per divisorem* b, *scribatur sic*; $\frac{a}{b}$ & *enunciatur*, a divisum per b. Secundo: *Non minùs usitatum signum* divisionis *sunt duo puncta* (:) *interjecta inter totum* dividendum, & divisorem; Ex. gr. *Si scribatur* a:b, *dic*, a *est* divisum per b.

SCHOLION.

31. *Quemadmodum* multiplicatio indicata (§. 25.) *significat* productum, *ita* divisio indicata, *significat* quotum, *adeoque hæ expressiones* $\frac{a}{b}$ *vel* a : b *exprimunt* quotum *ex* divisione *ortum.* Ex. gr. Si a *valeat* 12, b, *va-*

b *valeat* 4, *erit* $\frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3$, *item* a : b = 12 : 4 = 3, *cum* 3 *sit* quotus *ortus ex divisione* 12 *per* 4.

HYPOTHESIS X.

32. *Si* diviſio *quantitatis* polynomiæ *per* monomiam, & *viciſſim*; *item*, *ſi* diviſio polynomiæ *quantitatis per* polynomiam *indicanda ſit*, *polynomia quantitas parentheſi includatur*, *ſi nempe pro ſigno* diviſionis *uſurpentur* (:) *duo puncta*; *ſi verò per modum fractionis exprimere placeat*, *ommittatur parentheſis*, *ſed linea ſub* dividendo *ducta ad totum dividendum*, & *diviſorem extendatur*; Ex. gr. *Sit quantitas* a + b *indicanda eſſe diviſa per* c, *ſcribatur*, (a + b) : c, *vel* $\frac{a+b}{c}$ *eodem modo*, *ſi dividendus ſit* a, & *diviſor ſit* b + c, *ſcribatur*, a : (b + c) *vel* $\frac{a}{b+c}$ *item*, *ſit quantitas* polynomia a + b − c *indicanda eſſe diviſa per polynomiam* d + m, *ſcribatur*, (a + b − c) : (d + m) *vel ſic* $\frac{a+b-c}{d+m}$.

SCHOLION.

33. *Vulgo, ut in multiplicatione indicanda* (§. 28.) *dictum eſt*, *etiam in indicanda* diviſione *pro* parentheſi *uſurpatur linea*. Ex. gr. *locò* (a + b) : c, *ita* ſcribitur: $\overline{a+b}$: c, *item diviſio* polynomiæ *per* polynomiam, *ſic exprimitur*: $\overline{a+b-c}$: $\overline{d+m}$. *Hinc, quæ de his ſignis in Scholio* (§. 28. & 29.) *monuimus huc quoque cum analogia applicari poſſunt*.

CO-

COROLLARIUM I.

34. Quoniam, *quod multiplicatio componit, tollit divisio* (§. 121. Arith.) patet *multiplicationem*, & *divisionem* sibi *contrarie* opponi, atque adeo adducta (§. 25.) *signa multiplicationis*, & adducta (§. 30.) *signa divisionis* esse signa *contraria*, & *hinc destructiva*, sive *deletiva* quantitatum earundem his signis affectarum; quantitates his signis affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Unde manifestum est, sequens corollarium.

COROLLARIUM II.

35. Quantitas aliqua *multiplicata* per quantitatem aliam quamcunque, & per eandem simul *divisa*, manet *invariata*, id est, nec illi quantitati aliquid accedit per *multiplicationem*, nec per *divisionem* decedit aliquid. *Ex. gr.* Sit a quantitas *multiplicata* per b, & *divisa* per eandem b, erit expressio hujusmodi; $\frac{ab}{b} = a$, vel $\frac{a.b}{b} = a$, aut $\frac{a \times b}{b} = a$, item sic: $(a.b):b = a$, vel sic: $(a \times b):b = a$.

Idem patet in numeris, si *Ex. gr.* a valet 5, b valeat 2, erunt priores literales expressiones in numeris hujusmodi: $\frac{10}{2} = 5$, vel $\frac{5.2}{2} = 5$, aut $\frac{5 \times 2}{2} = 5$, item sic $(5.2):2 = 5$, vel $(5 \times 2):2 = 5$.

COROLLARIUM III.

36. Unde quantitas *multiplicans* simul, & *dividens* aliam aliquam quantitatem tanquam si non adesset, id est, pro *nulla* quantitate habetur, atque adeo *deleri*, & *omitti* potest.

SCHO-

SCHOLION.

37. *Ut memoriæ tyronum consuleretur, Hypotheſium hucusque declaratarum tabellam compendiariam, velut* memoriæ adjumentum quoddam *ſubjicere placuit; in qua reſiduas quoque nondum adductas* ſignorum Hypotheſes *quæ explicatione vix egent, ſubjungimus.*

TABULA COMPENDIARIA.

38. *Exhibens Hypotheſes ſignorum in Algebra hodierna uſitatorum.*

$+$ Eſt ſignum quantitatis *Poſitivæ*, ſeu *Affirmativæ*, & *Præſentis* (§.11.) item ſignum eſt *Additionis*, ſeu *collectionis*, (§.17.) & enunciatur per vocem: *plus*; ſic $a+b$, dic, *a plus b*.

NB. *Hoc ſignum initiò formulæ alicujus Algebraicæ, non præfigitur, præfixum tamen ſubintelligitur.* (§.12.)

$-$ Eſt ſignum quantitatis *Negativæ* (§.11.) item *Subtractionis*, ſeu *diminutionis*, (§.18.) & enunciatur per vocem, *minus*; ſic, $a-b$, dic, *a minus b*.

$\times$ vel (.) aut (,) eſt ſignum *Multiplicationis*, ſeu *producti*, ſic, $a \times b$, vel $a.b$, dic, *a eſt multiplicatum per b*, uſitatiſſimè ſic ſcribitur *ab* (§.25.& ſeq.)

: *Diviſionis*, ſeu *quoti*, ſed uſitatiſſimè per modum fractionis; ſic, $a:b$, vel $\frac{a}{b}$, dic, *a eſt diviſum per b*, (§.30. & ſeq.)

$=$ vel (::) aut (∞) eſt ſignum *Æqualitatis*; ſic, $a=b$, vel $a::b$, aut $a ∞ b$, dic, *a eſt æquale b*, (§.14.)

$>$ Est *Majoritatis*; ſic, $a > b$, dic, *a eſt majus, quàm b*, (§. 15.)

$<$ *Minoritatis*; ſic, $b < a$, dic, *b eſt minus, quàm a*, (§. 15.)

O *Nullitatis*; ſic, $a = 0$, dic, *a eſt æquale nihilo*, id eſt, *nulla quantitas*, (§. 20.)

$\backsim$ *Similitudinis*; ſic, $a \backsim b$, dic, *a eſt quantitas ſimilis quantitati b.*

∞ *Infinitudinis*; ſic, $a = \infty$, dic, *a eſt æquale infinito*, vel potius, *indefinito.*

$\sqrt{}$ Eſt ſignum *Radicis*; ſic, $a = \sqrt{b}$, dic, *a eſt æquale radici de quantitate b.*

$\sqrt{\sqrt{}}$ Significat *Radicem radicis*; ſic, $a = \sqrt{\sqrt{b+d}}$, dic, *a æquale radici de radice $b+d$.*

$\div\!\div$ Eſt ſignum *Proportionis geometricæ continuæ*, ut ſuo loco dicetur.

Cætera pauca per algebram occurrentia ſigna ſuis locis adferentur.

SCHOLION I.

39. *Iisdem omnino ſignis utitur* Algebra numeroſa (§. 2.), *ſeu ea pars Algebræ, quæ pro numeris* puris, & abſtractis *non ſubſtituit literas alphabeti, ſed adhibitis ſignis Algebræ cum numeris ſuas operationes peragit.*

SCHOLION II.

40. *Tyrones ſignificationem, & uſum horum ſignorum admodum familiarem ſibi reddant oportet, in quorum recto uſu ſtupenda totius Algebræ virtus, & admiranda vis, ac efficacia potiſſimum conſiſtit. His enim ſolis ſignis in acceptis referre debemus, artem, ac*

ac methodum proprio marte inveniendi, ac demonstrandi veritates mathematicas, seu Theoremata; *His signis debemus, resolutiones per quam faciles problematum seu quæstionum, quorum solutio vix possibilis fore crederetur; His signis adjuti plus hora, velut aliud agendo, sinè fatigio, & intensione intellectûs condiscimus, quàm alia methodo vix mense integro ex aliorum libris non sinè tædio, & molestia hauriremus. His signis adjuti regulas nobis formamus ipsimet generales, quæ literis, & signis paucis expressæ memoria ita retinentur, ut earum ætate tota vix oblivisci possimus; si tamen oblivisceremur, in his signis, penum mathematicam, velut in nuce Illyadem, collectam habemus, è qua sine magno labore regulam universalem, dum illa opus habemus, ultro nobismet ipsis depromimus. Signa hæc vices docentis, & nos instruentis Magistri fideliter obeunt, nihil recondunt, sed arcana omnia pandunt, & clarius longè, paucisque verbis veritates eloquuntur mathematicas, quàm dissertissimus Mathematicorum unquam præstare potuerit;* Verbo, *in his mysteria omnia totius artis Analyticæ contineri usus ipse docebit; hujus verò stupendæ signorum bonorum virtutis ratio in eo sita est, quod* notiones signis expressæ, *sint imagines quædam sistentes imaginationi nostræ ea præsentia, quæ alias, aut ultra ejus agendi sphæram ascenderent, aut ob imaginationis evagationem facilem, elaberentur.*

HYPOTHESIS XI.

41. *Quantitates cognitæ* eædem *seu æquales*, literis iisdem; diversæ, *literis etiam* diversis *denominandæ sunt.* Ex. gr. *Sint in data aliqua quæstione* floreni, grossi, cruciferi, *denominetur jam* arbitrariè *florenus per literam* a, *igitur per hanc literam* a, grossum *denominare non licet, sed* grossum *per diversam literam* Ex.gr. b, *item* cruciferum, *nec per literam* a, *nec per* b, *sed per tertiam aliquam* c *denominare co-*

gimur, (intelligendo in eadem tractanda quæstione) *quia* floreni, grossi, & cruciferi, *sunt inter se diversæ speciei, quam diversitatem, seu heterogeneitatem literæ substitutæ per seipsas exprimere tenentur.*

COROLLARIUM.

42. Quoniam numeri *puri*, & *abstracti* (§. 18. Arith.) solam multitudinem unitatum significant; unitatum autem multitudo una, altera multitudine major, minorve esse possit; sequitur *numeros puros* eandem multitudinem unitatum habentes, pro quantitatibus *æqualibus*, id est *iisdem* haberi, *Ex. gr.* 8, & 8, numeros verò puros majorem unitatum multitudinem habentes pro *inæqualibus*, id est *diversis*, censeri, *Ex. gr.* 5, & 8; Et hinc si pro numeris literæ substituantur, *Numeri ejusdem multitudinis per literas easdem, diversæ multitudinis per literas etiam diversas denominandi sunt*; ut si denominandi sunt numeri per literas, *Ex. gr.* 5, 8, 24, cum omnes inter se sint diversi; si sit $5 = a$, & $8 = b$, numerus 24 nec vocari potest a, nec dici b, sed per tertiam aliquam *Ex. gr.* $24 = c$, intelligendo in eadem quæstione tractanda.

SCHOLION.

43. *Quod de quantitatibus cognitis denominandis dictum est, idem in denominandis incognitis tenendum, ut diversæ incognitæ per diversas ultimas alphabeti literas, eædem verò per easdem denominentur, nisi diversæ quantitates incognitæ propter certam relationem ad se invicem, ad eandem reduci possint*, Ex. gr. *Sit una* x, *altera* y, *constet autem ex circumstantiis vel aliunde*, y *quantitatem esse* duplam de *quantitate* x, *tali casu, utique loco* y, *scribere possum* 2x, *adeoque* y *sub eadem expressione* x, *exhibere licet*; ut infra dicetur; *quod monitum etiam servit in denominandis cognitis.*

DE-

DEFINITIO V.

44. Quantitas monomia *composita*, dicitur, quæ duabus, vel pluribus literis (nullo intermediante signo aliquo) sibi invicem conjunctis expressa habetur; *Ex. gr.* bc, vel bca, aut $abdc$; item aa, vel aab, aut dfc, &c.

COROLLARIUM.

45. Ex (§.25.) patet, quod quantitas monomia composita exprimat Hypothesim multiplicationis *primo modo* indicatam, & vicissim Hypothesis multiplicationis *primo modo* indicata, exprimat quantitatem monomiam compositam.

DEFINITIO VI.

46. Quantitas monomia *affecta coëfficiente*, dicitur, cui ad partem sinistram (NB. *nequaquam ad dextram*) præfixus est numerus aliquis, vel absque signo ullo intermediante, *Ex. gr.* $3a$, vel $4ab$, aut $15bc$; vel etiam intermediante signo, sed *solius multiplicationis*, *Ex. gr.* $3.a$, vel $4.ab$, aut $15.ab$. Numeri verò præfixi vocantur *coëfficientes*.

COROLLARIUM I.

47. *Coëfficientes* itaque indicant, quoties sibimet quantitas literalis *addita* est, *Ex. gr.* $3a$ significat quantitatem a *ter* sibimet *additam*, & *Coëfficiens* 3 conjunctus quantitati a, supplet hanc longiorem expressionem; $a+a+a$; item $4ab$ significat quantitatem ab *quater* sibimet *additam*,

tam, & supplet vicem hujus longæ expressionis; $ab + ab + ab + ab$; unde porro liquet, quod expressio per *coëfficientes*, sit modus quidam scribendi per *abreviationem* quantitates literales, sibimet aliquoties additas, ita *Ex. gr.* loco hujus seriei; $bc + bc + bc + bc + bc + bc + bc$, brevissimè scribitur, $7bc$. Item loco hujus, $2bd + 3bd + 5bd + 7bd$, scribatur: $17bd$. Idem intelligendum de quantitatibus negativis, sic $-4a$, est compendiosa expressio hujus, $-a-a-a-a$.

COROLLARIUM II.

48. Quoniam omnis quantitas monomia (considerata per modum *totius*) seipsam *semel* sumptam, id est, *unum* totum significat, omnis quantitas monomia non affecta coëfficiente, *unitatem* tacitè præfixam habere intelligitur; *Ex. gr.* a idem est quod $1a$, aut $bc = 1bc$; &c. NB. *Hæc unitas nunquam expressè præfigitur*, (nisi circumstantiæ aliud suadeant) *semper tamen tacitè præfixa intelligitur.*

DEFINITIO VII.

49. Quantitas literalis *affecta exponente*, illa dicitur, quæ ad dextram sursum versus, vel numerum, vel literam appositam habet; *Ex. gr.* a^3, vel ab^4, aut a^e, vel a^m; numeri verò, vel literæ ad dextram positæ, vocantur *Exponentes.*

COROLLARIUM.

50. Cum *exponentes* ex Hypothesi indicent repetitam datæ quantitatis per semetipsam multiplicationem, *Ex. gr.* a^3 indicat quantitatem a esse multiplicatam per eandem a seu aa, & hoc factum aa, esse iterum multiplicatum per a, seu aaa; sequitur, expressionem hanc a^3, sup-

plere

plere hanc longiorem, *aaa*, vel $(a.a).a$, aut hanc $(a \times a) \times a$; & hinc liquet, expreſſionem per *exponentes*, eſſe modum ſcribendi per *abreviationem* quantitates easdem in ſemet aliquoties multiplicatas. Sic loco hujus ſeriei; $a.a.a.a.a$, vel loco hujus; *aaaaa*, breviſſimè ſcribitur; a^5.

SCHOLION.

51. *Obſervent tyrones, atque altè menti imprimant* notiones diſtinctas coëfficientium, *&* exponentium, *nè ſcilicet* coëfficientes, *cum* exponentibus *confundantur, aut pro eodem accipiantur; Alia enim longe quantitas indicatur per* coëfficientem, *& alia per* exponentem, *ſic* Ex. gr. *alia quantitas eſt* 3a, *& alia* a^3; *nam* 3a *ponitur loco hujus expreſſionis*, $a+a+a$ (§. 47.) *Hæc verò* a^3, *loco hujus* aaa, *vel loco hujus* $(a.a).a$, (§. 50.) *quarum prior nempe* 3a *ſignificat* additionem ſimpliciter *toties factam, quot unitates habet coëfficiens numerus* 3. (§. 47.) *Altera verò*, a^3, *multiplicationem ſuimetipſius, & quidem iteratam indicat*, (§. 50.) *ut patet ad oculum ſi pro literis ſubſtituantur numeri; Ex. gr. Sit* $a=4$. *erit*; $3a=a+a+a$, *hoc eſt* $4+4+4=12$. (§. 47.) *Hæc verò* $a^3=(a.a).a$, *hoc eſt*: $(4.4).4=64$ *per* (§. 50.). *Adeoque* $3a=12$, *&* $a^3=64$. *patet autem* 12, *&* 64 *eſſe quantitates utique valde inter ſe diſcrepantes.*

DEFINITIO VIII.

52. Quantitates monomiæ dicuntur *Homogeneæ* (§. 20. Arith.) quæ, & iisdem literis conſtant (§. 41. & 43.) & *exponentes* (ſi adſint) eosdem habeant, tametſi diverſis affectæ ſint coëfficientibus; ſic Homogeneæ ſunt *Ex. gr.* $3a$, & $4a$, item, $2ab$, & $5ba$, vel $3a^2$, & $7a^2$.

SCHOLION.

53. *Animadvertant Tyrones* Homogeneitatem *in quantitatibus monomiis* compoſitis *non tolli per diver-*

sum præcise earundem literarum inter se ordinem; & situm; sic quantitas composita monomia, Ex. gr. abc *manet* homogenea, *licet* ejusdem *literæ quocunque ordine, & situ permutatæ combinentur*, Ex. gr. abc, acb, bca, bac, cba, cab, *& hinc adductæ hæ quantitates singulæ exprimunt* Hypothesim multiplicationis (§. 45. & 25.) factum *autem seu* productum *manet idem, quomodocunque factores inter se ducantur*, (§. 49. *Arith.*) *igitur manifestum est, adductas quantitates esse inter se easdem, & æquales, id est*, homogeneas.

DEFINITIO IX.

54. *Heterogeneæ* quantitates monomiæ (§. 21. Arith.) dicuntur, quæ vel per unam literam diversam inter se discrepant, aut *exponentes* (si adsint) diversos habeant; diversitas autem *coëfficientium* non inducit *heterogeneitatem*, (§. 52.) sic *heterogeneæ* sunt, *Ex. gr. a* & *b*, item, *ab*, & *bc*, aut *cba*, & *bcd*; *Heterogeneæ* quoque sunt, numeri seorsim positi, & literæ, *Ex. gr. ab*, & 15, aut 3*bc*, & 3, &c.

SCHOLION.

55. *Quod de* homogeneitate, & heterogeneitate *quantitatum monomiarum* compositarum, exponentibus *affectarum, dictum est, idem omnino cum analogia intelligendum est de quantitatibus monomiis habentibus præfixum signum* (√), *ut suo loco declarabimus.*

DEFINITIO X.

56. *Formula*, aut *Propositio practica Algebraica*, dicitur quodvis literale complexum, exhibens universaliter per signa Algebraica factas, aut faciendas operationes algebraicas; *Ex. gr. Hoc complexum*

Al-

Algebraicum, $x = \frac{bc}{a}$ *exhibens quantitatem incognitam* x, *esse* æqualem *quantitati* b, multiplicatæ *per quantitatem* c, *&* divisæ *per quantitatem* a, & hinc.

DEFINITIO XI.

57. *Resolutio Algebraica*, (quæ etiam *constructio* in geometria appellatur) est, si formula algebraica secundum suam expressionem universalem proposita, resolvatur in suos valores determinatos, substituendo videlicet pro literis, vel *numeros arithmeticos*, vel *figuram per lineas* geometricè construendo; si in numeros simpliciter resolvatur, dicitur *Resolutio*, si verò per lineas geometricas determinetur, dicitur *constructio*. *Ex.gr.* Sit $b = 4$, $c = 3$, & $a = 2$, sitque *formula Algebraica resolvenda in numeros substitutos hæc*; $x = \frac{bc}{a}$ *erit in numeris*; $x = \frac{4 \cdot 3}{2}$, seu, $x = \frac{12}{2}$, id est, $x = 6$; *adeoque* x *est* æqualis *quantitati numericæ* 4, multiplicatæ *per numerum* 3, *&* divisæ *per numerum* 2; quod ipsum faciendum *formula algebraica* eloquitur.

DEFINITIO XII.

58. *Demonstratio*, seu *propositio speculativa algebraica*, est formula algebraica, quæ per sua signa, ac literas exhibet, & elo-

eloquitur eam veritatem universalem, quam demonstrandam proposuimus, simulque continet tacitè argumentationem demonstrativam. *Ex.gr.* Sit algebraicè demonstranda hæc veritas universalis: *Quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt;* erit demonstratio algebraica hæc formula: $-a+a=0$, quæ formula universalis dictam propositionem exactè eloquitur, & simul hanc tacitam argumentationem continet: *Quantitas* $-a$ *est quantitas* negativa *per* (§. 11.), & *quantitas* $+a$, *est quantitas* positiva *per* (§. 11.); *eadem hæc quantitas positiva* $+a$, *est simul* æqualis *quantitati* $-a$, *per* (§. 41.) *præterea quantitas* $+a$, *est simul* addita *quantitati* $-a$, *per* (§. 17.), *ergo* (in hac formula) *habetur quantitas positiva conjuncta cum quantitate negativa æquali; sed* quantitas positiva cum quantitate negativa æquali æquantur nihilo, id est, se invicem destruunt totaliter per (§. 20.), *ergo quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt totaliter.* En stupendam signorum energiam.

COROLLARIUM.

59. Liquet itaque formulas algebraicas, & exprimere *propositionem speculativam*, vel *practicam*, & simul continere modum perfectissimum argumentandi, id est, *demonstrationem*, & quidem paucissimis characteribus clarissimè tanquam

quam in imagine expressam, & eloquentem. *Patet secundo*: mira signorum, & literarum virtus, quæ utpote *universaliter* eloquuntur, quam virtutem *numeri*, etiamsi sint *puri*, possidere nequeunt, cum numeri determinatas unitatum multitudines exhibeant, id est, numeri sunt *quantitates determinatæ* & hinc *formula Algebræ numerosæ* (§.39.) *declarationi* tantum, non autem *demonstrationi* inservire potest. *Tertio*: clarum est, *formulas Algebraicas*, esse quoddam *compendium universale* veritatum mathematicarum, quo una linea sæpe tot veritates eloquitur, quas si per voces consignare, & explicare vellemus, non una pagina conscribenda foret, *ut patebit inferius*. Qua propter.

SCHOLION.

60. *Tyrones seriò* contemplationi, *ac* resolutioni *formularum Algebraicarum incumbant*, quod ipsum monitum in Prolegomenis ad Tyrones dedi, *atque habita præ oculis formula algebraica quacunque, identidem sibimet ipsis hanc cantilenam occinant*; Quid loquitur hæc formula? Quam veritatem per sua signa, & literas indicat, & exprimit? quid jubet faciendum? *Experto credant velim, cantilenam hanc* millies *repetitam*, millies *placituram magis, cum fructu Rei literariæ, & quod consequens est, Reipubl. nullo non tempore satis æstimando, proprio experimento discent, dum ea in lucem* marte proprio *proferent, quæ hactenus, vel acutissimos etiam Mathematicos, & Philosophos, aut latuerunt, aut quæ repererunt adeo obscuris ambagibus, ad nos transmissa dolemus, ut iis explicandis, & enodandis Oedipi sagacitatem vix suffecturam crederes.*

THEOREMA I. PRÆLIMINARE.

61. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propositionem speculativam rite per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, vices obit* Theorematis Mathematici.

DE-

DEMONSTRATIO.

Theorema mathematicum eſt complexum conſtans propoſitione ſpeculativa univerſali, & demonſtratione propoſitionis, ſeu eſt veritas propoſita, & demonſtrata, per (*Prolegom.*), ſed hujusmodi complexum eſt omnis formula algebraica continens propoſitionem ſpeculativam ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deductam, per (§. 58.) ergo. Q. E. D.

THEOREMA II. PRÆLIMINARE.

62. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propoſitionem practicam ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deductam, vices obit* problematis Mathematici.

DEMONSTRATIO.

Problema Mathematicum, eſt complexum conſtans propoſitione practica, reſolutione propoſitionis, & demonſtratione reſolutionis, per (*Prolegom.*) ſed hujusmodi complexum eſt omnis formula algebraica continens propoſitionem practicam ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deductam per (§. 56. & 57.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

63. Quidquid igitur formula algebraica ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deducta

ducta exprimit, & eloquitur, pro *demonstrato* ab omnibus concedendum, & admittendum est.

SCHOLION.

64. *Tyrones singula, quæ hoc capite, quod jure clavim totius Algebræ dixerim, continentur, sæpius relegendo repetant, ac memoriæ mandent. Expertus loquor, eos, qui hæc intelligendo penetraverint, & memoria retinuerint, vix aliquam per decursum hujus doctrinæ difficultatem habituros. Iis verò, qui hoc neglecto capite ad cætera Algebræ secreta sinè clavi hac se penetraturos confidunt, suadeo, pedem referant, atque tempus pretiosum, in hoc perdendum, in alio scientiæ genere redimant.*

CAPUT II.

De Additione Algebraica.

DEFINITIO XIII.

65. *Quantitates literales*, seu *Algebraicæ* dicuntur quantitates quæcunque per literas alphabeti (§. 4.) denominatæ, & expressæ. *Ex. gr.* Si linea vocetur *a*, aut numerus 1000 appelletur *b*. Quantitates *a* & *b* vocantur *literales*, seu *algebraicæ*.

DEFINITIO XIV.

66. *Additio Algebraica* est quarumcunque, & quomodocunque affectarum quantitatum literalium, (sive eæ numeris permixtæ sint, sive non sint) in unum complexum algebraicum collectio. Hoc complexum vocatur *Totum*, seu *Summa*.

THE-

THEOREMA III. FUNDAMENTALE.

67. PROP. *Complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium* suis signis *affectarum, non variatur quoad quantitatem;* id est, *valor complexi algebraici nec augetur, nec minuitur. Ex. gr.* Complexum algebraicum $(a+b-c)$ idem manet quoad quantitatem seu scribatur; $(b+a-c)$, sive $(b-c+a)$, sive $(-c+a+b)$, aut $(-c+b+a)$ &c.

DEMONSTRATIO.

Complexum Algebraicum est *totum quoddam*, aggregatum ex quantitatibus literalibus duabus, vel pluribus, tanquam partibus (§. 23. & 24.) *totum* autem variari non intelligitur quoad quantitatem, nisi varientur quoque quoad quantitatem partes constituentes totum (§. 25. Arith.) sed partes quoad quantitatem non variantur per solam permutationem loci aut ordinis (§. 3.), ergo complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium *suis signis* affectarum non variatur quoad quantitatem. Q. E. D.

SCHOLION.

68. *Theorema hoc per modum axiomatis assummi poterat, cum penetratis ritè terminis veritas per se nota sit; certum nempe clarumque est, numerum Ex. gr.* 100

100 hominum non variari quocunque ordine 100 homines disponantur, semper enim numerus 100 hominum, erit centum, & nunquam major, aut minor per solam transpositionem localem evadere potest.

COROLLARIUM I.

69. Quoniam summa ex *Additione algebraica* resultans est *complexum algebraicum*; eadem erit summa, quocunque ordine quantitates literales cum suis signis collectæ scribantur; Et hinc *Additio* quantitatum literalium inchoari potest à quacunque quantitate literali ad arbitrium operantis, modo in summa, omnes ritè collectas esse, exprimatur.

COROLLARIUM II.

70. Cum in *subtractione algebraica* residuum, sit differentia quantitatum, & quidem singularum à singulis (§. 37. Arith.) differentiam quoque per solam permutationem quantitatum literalium suis signis affectarum, non variari; clarum est.

COROLLARIUM III.

71. In *multiplicatione* quoque *algebraica* factum totale per solam permutationem factorum partialium non variari, clarum est ex notione totius complexi algebraici (§. 67.); In factis autem partialibus combinatio literarum per (§. 25.) non variat factum, quocunque ordine factores inter se combinentur ut patet ex (§. 53.) Et hinc *multiplicatio algebraica* inchoari potest â quacunque quantitate *multiplicandi*, & per quamcunque quantitatem *multiplicantis*; *ut infra patebit.*

COROLLARIUM IV.

72. Ex eodem Theoremate sequitur, quod in *Divisione algebraica*, arbitrarium sit operanti, divi-

divisionem inchoare à quacunque quantitate *dividendi*, & per quamcunque quantitatem *divisoris*; item quotos ex divisione resultantes quocunque ordine scribi posse, infra docebitur.

SCHOLION.

73. *Liquet itaque multo faciliores esse operationes Arithmeticæ literalis, quam numerorum, cum in operationibus numericis opus sit multis regulis solum situm, & ordinem concernentibus, eæque regulas caute observandas habeat operans, quibus in calculo literali tutò supersedemus.*

PROBLEMA I.

74. PROP. *Quantitates quascunque signis algebraicis expressas addere.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates addendæ sint inter se homogeneæ* (§. 52. & 53.)

I. *Coëfficientes* quantitatum homogenearum iisdem signis (hoc est, quarum quælibet habet signum +, vel quævis signum −) affectarum, colligantur in unam summam sub suis signis per (§. 47. & 48.) exprimendam. *Hic revocentur in memoriam* (§. 12. & 48.) *Vide exemp. I. casus I.*

II. Si quantitates homogeneæ sint affectæ diversis, seu contrariis signis (§. 19.) id est, (una harum habeat signum +, altera −), *coëfficiens* minoris subtrahatur à majore, & residuum scribatur in loco summæ, præfixo signo habentis majorem coëfficientem per (§. 21.) *Vide exemp. II. cas. I.*

III. Si

III. Si quantitates homogeneæ, diversis signis affectæ, sint æquales, id est (si æquales habeant coëfficientes) in loco summæ omittantur, seu non scribantur. *Vide exempl. III. casûs I.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. est hypothesis (§. 47. & 48.) Reg. II. continetur in (§. 21.) Reg. III. innititur axiomati (§. 20.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates addendæ sint heterogeneæ* (§. 54.)

Regula unica; Quantitates heterogeneæ manentibus suis signis in loco summæ sibi tantum juxta scribantur, quocunque ordine; Hic in *memoriam* etiam *revocandus* (§. 12.) *Vide exemp. I. & II. casûs II.*

DEMONSTRATIO.

Patet hanc collectionem esse solum additionem indicatam (§. 17.) cum heterogeneæ quantitates reipsa per coëfficientes addi nequeant per (§. 31. Arith.) Q. E. D.

CASUS III. *Si ex quantitatibus addendis, quædam sint homogeneæ, quædam vero heterogeneæ.*

I. *Homogeneæ* addantur *per regulas casûs I.*

II. *Heterogeneæ* sibi juxta ponantur in loco summæ cum suis signis per reg. casûs II. *Vide exemp. I. & II. casûs III.*

CASUS IV. *Si quantitates addendæ ſint numeri ſeorſim cum ſignis algebraicis poſiti.*

I. Cum numeri ſint quantitates inter ſe homogeneæ, addendi ſunt *per regulas casûs I. Vide exempl. I. casûs IV.*

II. Cum numeri ſeorſim poſiti ſint quantitates heterogeneæ reſpectu quantitatum literalium, ſi cum iis addendi veniant, ſervetur *reg. casûs II. Vide exemp. II. caſ. IV.* Hic casûs jam demonſtratus eſt.

PARADIGMA

Exemplorum Additionis algebraicæ.

CASUS I.

EXEMP. I. REG. I.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 3a - 2b + c & \text{♂} \\ 4a - 3b + c & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Sum.}\ 7a - 5b + 2c \quad \text{☿}$$

EXEMP. II. REG. II.

$$\text{Ad.}\begin{cases} a^2 + 7b - 4c & \text{♂} \\ 7a^2 - 9b + 7c & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Sum.}\ 8a^2 - 2b + 3c \quad \text{☿}$$

EXEMP. III. REG. III.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 2a + 3b - c + d & \text{♂} \\ 3a - 3b + c + 2d & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Sum.}\ 5a \quad + 3d \quad \text{☿}$$

CASUS II.

EXEMP. I.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 3ab + cd - f & \text{♂} \\ ac + 5ab - 7 & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Su.}\ 8ab + ac + cd - f - 7 \quad \text{☿}$$

EXEMP. II.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 12a - 4c + b & \text{♂} \\ -3b + ad + 4c & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Sum.}\ 12a - 2b + ad \quad \text{☿}$$

EXEMP. III.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 5x + 3y - 8b & \text{♂} \\ 2xy - 3y + 12 & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Su.}\ 5x + 2xy - 8b + 12 \quad \text{☿}$$

CASUS III.

EXEMP. I.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} 4a^3 + 3b & \text{♂} \\ 3ab - db & \text{♄} \end{cases}$$

$$\text{Sum.}\ 4a^3 + 3b + 3ab - db \quad \text{☿}$$

Ex-

EXEMP. II.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} a^2 + a^3 - 15 & ♂ \\ 2a - bc + 8c & ♄ \end{cases}$$

$$\text{Sum. } a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15 \quad ☿$$

CASUS IV.

EXEMP. I.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 24 + 8 - 4 = 28 & ♂ \\ 15 - 10 + 4 = 9 & ♄ \end{cases}$$

$$\text{Sum. } 39 - 2 = 37 \quad ☿$$

EXEMP. II.

$$\text{Ad.}\begin{cases} ad + b - 4 & ♂ \\ 6 + ad - f & ♄ \end{cases}$$

$$\text{Sum. } 2ad + b - f + 2 \quad ☿$$

SCHOLION.

75. *In gratiam Tyronum (qui in idæis universalibus veritatem propositam non illiço assequuntur) adductum* universale exemplum I. casûs I, *claritatis gratia ad determinatas quantitates applicare placuit, substituendo videlicet loço literarum, vel certas quantitates, vel numeros. Igitur significet;* a *unum florenum Germ.* b *unum grossum,* c *crucif. erit in numeris determinatis.*

EXEMPLUM I. CASÛS I.

Algebraicé numericè

$$\begin{array}{llllll} 3a - 2b + c & \textit{id est;} & 3 \textit{ flor.} & - 2 \textit{ groff.} & + 1 \textit{ cr.} & ♂ \\ 4a - 3b + c & \textit{seu} & 4 & - 3 & + 1 & ♄ \\ \hline \text{Sum. } 7a - 5b + 2c & & = 7 \textit{ fl.} & - 5 \textit{ gr.} & + 2 \textit{ cr.} & ☿ \end{array}$$

Idem Arithmetice.

flor.	*groff.*	*crucif.*	
2	18	1	♂
3	17	1	♄
6	15	2	☿

Idem exemplum substituendo pro literis numeros

Sit; $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$

erit

$$\begin{array}{llll} 3a - 2b + c & = 15 - 8 + 7 & = 14 & ♂ \\ 4a - 3b + c & = 20 - 12 + 7 & = 15 & ♄ \\ \hline \text{Sum. } 7a - 5b + 2c & = 35 - 20 + 14 & = 29 & ☿ \end{array}$$

Eodem modo, & reliqua exempla substitutis loco literarum numeris, vel certis quantitatibus, veritatem doctrinæ declarant.

CAPUT III.

De Subtractione Algebraica.

DEFINITIO XV.

76. *Subtractio Algebraica*, est inventio, vel expressio complexi alicujus algebraici, quod per sua signa exhibet *differentiam*, seu *residuum* alterius majoris, vel simplicis, vel complexæ quantitatis. *Ex. gr.* Si ex quantitate a, sit subtrahenda quantitas b, erit complexum $a-b$, exhibens differentiam, seu residuum de quantitate a, (§. 18.)

AXIOMA III.

77. Ablatio, seu subtractio quantitatis positivæ, est ejusdem quantitatis subtrahendæ positio negativa; & vice versa, ablatio, seu subtractio quantitatis negativæ, est ejusdem negativæ quantitatis subtrahendæ, positio positiva. (§. 20. & 21.) *Ex. gr.* Si Petrus habeat flor. 8. positivos, & eidem aufferantur 3. flor. positivi, habebit Petrus tantum 5. flor. id est; $8-3$. Et vice versa; si Petro habenti 5 fl. seu $8-3$, donentur 3 floreni, habebit utique $5+3$ seu 8, id est $8-3+3=8$. (§. 20.)

PROBLEMA II.

78. PROP. *Quantitates quascunque, signis algebraicis expressas, ab aliis quantitatibus algebraicis subtrahere.*

RE-

RESOLUTIO.

I. Quantitates ſubtrahendæ ſubſcribantur quantitatibus, à quibus ſubtractio fieri debet. *Vide exempl. I. & II. &c.*

II. Signa in quantitatibus ſubtrahendis mutentur in contraria, id eſt, (ſignum + mutetur in —, & ſignum — mutetur in +) *Vide exempl. I. & II. &c.*

III. Sic affectæ quantitates ſub ſignis ſuis contrariis, addantur (per regulas Problema prior.) cum quantitatibus ſuperioribus in unam ſummam, dabit ſumma hæc differentiam, ſeu reſiduum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Subtractio quantitatis poſitivæ à poſitiva eſt ejuſdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa, & vice verſa per axioma (§. 77.), ſed hoc factum eſt per datas regulas, ergo per datas regulas ritè peracta habetur ſubtractio, ergo ritè inventa differentia, ſeu Reſiduum (§. 76.)

SCHOLION.

79. *In his & cæteris ſubtractionum algebraicarum adducendis exemplis*, mutationem ſignorum in contraria, *indicabimus ſignis inferiore loco in ſubtrahendo poſitis*, Ex. gr. *Si + in — ſit mutatum, indicabitur hoc modo* $(\underset{-}{+})$ *& vice verſa — in +, hoc modo* $(\underset{+}{-})$, *unde pro facienda additione* (juxta datam regulam III. hujus) *ſigna inferiore loco poſita uſurpanda erunt, ſuperiora verò in ſubtrahendo poſita ſigna, pro non adjectis habenda.*

PARADIGMA.

Exemplorum Subtractionis Algebraicæ desumptis exemplis ex Additione (§. 74.)

CASûS I. EXEMPLUM I.

	$7a - 5b + 2c$	☿
Subtrah.	$4a - 3b + c$	
Mut. sig.	$-4a + 3b - c$	♄
Resid.	$3a - 2b + c$	♂

EXEMPLUM II.

	$8a^2 - 2b + 3c$	☿
Subtrah.	$7a^2 - 9b + 7c$	
Mut. sig.	$-\quad +\quad -$	♄
Resid.	$a^2 + 7b - 4c$	♂

EXEMPLUM III.

	$5a + 3d$	☿
Subtrah.	$3a + 2d - 3b + c$	
Mut. sig.	$-\quad -\quad +\quad -$	♄
Resid.	$2a + d + 3b - c$	♂

CASûS II. EXEMPLUM II.

	$a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15$	☿
Subtrah.	$2a - bc + 8c$	
Mut. sig.	$-\quad +\quad -$	♄
Resid.	$a^2 + a^3 - 15$	♂

CASûS II. EXEMPLUM III.

	$12a - 2b + ad$	☿
Subtrah.	$-3b + ad + 4c$	
Mut. sig.	$+\quad -\quad -$	♄
Resid.	$12a + b - 4c$	♂

CASûS IV. EXEMP. I.

	$39 - 2 = 37$	☿
Subt.	$15 - 10 + 4 = 9$	♄
Mut. sig.	$-\quad +\quad -$	
Resid.	$24 + 8 - 4 = 28$	♂

SCHO-

SCHOLION I.

80. *Ut veritas doctrinæ Tyronibus magis eluscat, bina exempla in scholio Additionis* (§. 75.) *adducta, & ad quantitates determinatas applicata, hic exhibemus, igitur significet* a *flor.* b *groſſ.* c *crucif. ut in additione.*

Casûs I. Exemplum I.

	$7a - 5b + 2c$		7 *fl.* $- 5$ *gr.* $+ 2$ *cr.* ☿
Subtr.	$4a - 3b + c$	*seu*	$4 \quad - 3 \quad + 1$ ♄
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$		$- \quad + \quad -$
Resid.	$3a - 2b + c$	*seu*	3 *fl.* $- 2$ *gr.* $+ 1$ *cr.* ♂

Id est

flor.	*groſſ.*	*crucif.*	
6	15	2	☿
3	17	1	♄
2	18	1	♂

Idem in numeris juxta substitionem (§. 75.)

Sit $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$.

Erit

	$7a - 5b + 2c$	$=$	$35 - 20 + 14$	$=$	29	☿
Subtr.	$4a - 3b + c$	$=$	$20 - 12 + 7$	$=$	15	♄
M. sig.	$- \quad + \quad -$		$- \quad + \quad -$			
Resid.	$3a - 2b + c$	$=$	$15 - 8 + 7$	$=$	14	♂

SCHOLION II.

81. *Examen Additionis sive proba (si eam facere placet) in Algebra, fit per regulas subtractionis* hujus Probl. *ut exempla omnia declarant. Eodem modo examen subtractionis fit per regulas additionis* (§. 74.) *adductas. Videlicet, si quantitas subtrahenda non mutatis signis, seu cum signis superioribus expressa, addatur residuo, summa restituit quantitatem, à qua subtractio facta est. En Examen, seu probam exempli I. casûs I.*

		$7a - 5b + 2c$	☿
	Subtrah.	$4a - 3b + c$	♄
	Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	
Addendæ	*Resid.*	$3a - 2b + c$	♂
	Subtr.	$4a - 3b + c$	♄
	Summa	$7a - 5b + 2c$	♂

CA-

CAPUT IV.

De Multiplicatione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

82. Multiplicatio algebraica, est *ductus* quantitatis algebraicæ unius in aliam, qui *ductus* exprimitur per hypothesim *multiplicationis primo modo* (§. 25.) *indicatæ.*

THEOREMA IV.

83. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per positivam, & vice versa, quantitatis positivæ per negativam,* factum *producit* negativum; *id est; signum* — *cum* +, *item* + *cum* —, *dat in facto signum* —.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Multiplicatio est *iterata additio;* (§. 46. Arith.) sed additio ejusdem quantitatis negativæ iterata, seu toties facta quoties quantitas positiva affirmat, producit summam negativam, (§. 47. & 74.) id est, *factum negativum*, ergo; *quod erat primum.*

Pars II. *Productum*, seu *factum* non variatur, sive multiplicans in multiplicandum, sive multiplicandus in multiplicatorem ducatur per (§. 49. Arith.) sed (*per partem I. hujus*) quantitas negativa, multiplicata per positivam, factum producit negativum,

ergo

ergo etiam eadem quantitas positiva, multiplicata per negativam, *factum* producit *negativum. Cum tam affirmare negationem, quam negare affirmationem sit simpliciter negare. Quod erat alterum.*

SCHOLION.

84. *Demonstratio hæc, uti & sequentis Theorem. Tyronibus (qui algebraicis nondum assuevêre demonstrationibus) interea sufficiat, donec ad calcem hujus doctrinæ Algebraicæ, hoc, & cætera quæpiam Theoremata ope æquationum algebraicorum directe demonstraturi summus. Ne quis verò me criminis*, admissi *in demonstratione* paralogismi *arguat; videlicet, eadem, sed inversa ratione, argumentando, probari quoque:* multiplicationem quantitatis positivæ per negativam, & vicissim negativæ per positivam, factum producere debere positivum; *adeoque eadem demonstratione* contradictorium *confici; Is noverit, argumentationem hanc meam huic initi fundamento; quod*, tam affirmare negationem, quam negare affirmationem, sit simpliciter negare; *quantitas autem positiva est affirmativa, & negativa est negativa* (§. 11.) ut patebit inferius in schemate affirmationum, & negationum; *cui fundamento, cum inversa ratio argumentandi initi non possit, crimine* admissi paralogismi *me absolvendum, sano quisquis utitur judicio haud difficilè intelliget.*

THEOREMA V.

85. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per negativam*, factum *producit* affirmativum, *seu* positivum; *id est, signum − cum −, dat in facto signum +.*

DEMONSTRATIO.

Negare negationem est simpliciter affirmare (per scholion §. 87.) sed multiplicare quantitatem negativam per negativam, est unam quantitatem negativam toties negare, esse sibi negativè additam, quoties altera negativa negat, ergo se invicem affirmant, seu ponunt positive, ergo *factum* producunt *positivum*. Q. E. D.

COROLLARIUM.

86. Ex his duobus Theorematibus deducitur regula in multiplicatione algebraica cautè observanda, videlicet; *Signa eadem factorum, dant in facto* +, *diversa verò* −; id est: si uterque factorum habeat + præfixum, vel uterque habeat præfixum signum −, in facto ponendum est signum +; si verò unus factorum habeat +, alter −, in facto scribendum est −.

SCHOLION I.

87. *Ut veritas datæ regulæ, ex Theorematibus deductæ, vel ipsis oculis Tyronum pateat*, schema affirmationum, & negationum *subjectum, inspicere velint, in quo quantitas positiva, seu affirmativa, respondet affirmationi, seu signo* +, *quantitas verò negativa; negationi, id est signo* −.

Schema affirmationum, & negationum.

Qui affirmat +
- *Se* $\overset{-}{\textit{negasse}}$ *aliquid, ille id ipsum* $\overset{-}{\textit{negat}}$.
- *Se* $\overset{+}{\textit{affirmâsse}}$ *aliquid, ille id ipsum* $\overset{+}{\textit{affirmat}}$.

Qui negat −
- *Se* $\overset{-}{\textit{negasse}}$ *aliquid, ille id ipsum* $\overset{+}{\textit{affirmat}}$.
- *Se* $\overset{+}{\textit{affirmâsse}}$ *aliquid, ille id ipsum* $\overset{-}{\textit{negat}}$.

Ergo;

+ *cum* −, *dat* −.
+ *cum* +, *dat* +.
− *cum* −, *dat* +.
− *cum* +, *dat* −.

SCHO-

SCHOLION II.

88. *Ante faciendam multiplicationem per sequens problema, in memoriam velim revocentur (§§. 25. 53. & 71.) cum ductus quantitatis algebraicæ unius in alteram, fiat per solam literarum conjunctionem, seu combinationem.*

PROBLEMA III.

89. PROP. *Quantitates algebraicas quasvis, per quantitates alias quascunque multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates literales non sint affectæ coëfficientibus, aut exponentibus, nec numeris aliis permixtæ.*

I. Infra multiplicandum scribatur multiplicans cum suis signis, & subducantur lineâ. *Vide exemp. I. & II.*

II. Singula membra *multiplicantis* ducantur in singula membra *multiplicandi*, ut *in arithmetica.* Ductus autem iste fit præcisè combinando literas *multiplicantis* cum literis *multiplicandi.* (§. 25.) *Vide facta partialia in exempl. I. & II.*

III. Signa in factis partialibus præfigantur *juxta regulam* (§. 86.) videlicet; *signa eadem, dant* +, *diversa* −; *Vide exempl. I. & II.*

IV. Facta partialia (*ductâ lineâ*) colligantur, seu addantur in unam summam totalem, *per Reg. Addit.* (§. 74.) summa hæc dabit factum totale. *Vide exem. I. & II.*

DE-

DEMONSTRATIO

Regula I. demonſtratione non eget. Reg. II. conſtat ex (§. 53. Arith.) Reg. III. eadem eſt, quæ (§. 86.) & denique Reg. IV. habetur demonſtrata (§. 74.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates inter ſe multiplicandæ affectæ ſint coëfficientibus.*

Præter Regulas datas in caſu I. obſerventur hæ:

I. Coëfficientes ſingulorum membrorum in multiplicando, multiplicentur per coëfficientes ſingulos multiplicantis, ut *in Arith.* & facta coëfficientium ſingulorum adſcribantur ſingulis factis literalibus partialibus, ad ſiniſtram, præfixo ſigno *juxta reg. III. caſ. I. Vide exempl. I. caſ. II.*

II. Si factorum unus habeat coëfficientem, alter verò careat coëfficiente, tum coëfficiens invariatus præfigatur facto literali partiali; *Vide exemp. II. caſ. II.*

DEMONSTRATIO.

Reg. I. patet ex (Arith. §. 53.) cum coëfficientes ſint numeri. Reg. II. clara eſt; quia coëfficiens quantitatis literalis carentis coëfficiente eſt (1) tacitè præfixa, (§. 48.) unitas verò non multiplicat, hinc rectè præfigitur facto literali, coëfficiens alterius quantitatis invariatus.

CA-

CASUS III. *Si quantitates affectæ ſint exponentibus.*

Præter regulas casûs I. has ſervare neceſſe eſt;

I. Videatur an *factorum* literæ, exponentibus affectæ, ſint inter ſe homogeneæ; ſi homogeneæ ſunt, numeri, vel (ſi exponentes etiam ſint literæ) literæ exponentium, addantur, & pro *facto* (loco combinationis literarum homogenearum) una duntaxat ex homogeneis litera ſcribatur, cuj ad dextram ſurſum verſus ſumma inventa exponentium ſuperſcribatur, ceteræ verò literæ heterogeneæ adhærentes per *regulas caſ. I.* combinatæ exprimantur. *Vide exemp. I. & II. caſ. III.*

II. Si unus ex factoribus habeat exponentem, alter verò eidem homogeneus careat exponente; Exponens factoris homogenei augeatur unitate, & ita auctus ſuperſcribatur uni literæ homogeneæ, ut in *regula I. hujus. Vide exempl. IV. caſ. III.*

III. Exponentes heterogenearum literarum invariati, cum ſuis literis quas afficiunt, ſcribendi ſunt in facto. *Vide exemp. III. caſ. III.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 49. 50. & 51.) reg. III. ex (§. 41.)

SCHOLION.

90. *Tyrones adductum post exempla hujus III. casûs positum scholion (§. 91.) non prætermittant legendo, in quo fundamentum additionis exponentium, declaratur ad illorum captum.*

CASUS IV. *Multiplicare algebraicè inter se quascunque quantitates datas, affectas coëfficientibus, exponentibus, ac aliis numeris permixtas.* Serventur regulæ casûs I. II. & III. ac præterea regulæ arithmeticæ (§. 53. Arith.) *Vide exempl. I. & II. cas. IV.* Hic cas. IV. demonstratione non eget, cum in hoc antecedentes omnes casûs collecti habeantur.

PARADIGMA

Exemplorum Multiplicationis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.			EXEMPLUM II.
Multiplicand.	$a - b$	*facto-*	$a + b - c$
Multiplicans	$a - b$	*res.*	$a + b$
Facta	$aa - ab$		$aa + ab - ac$
Partialia	$- ab + bb$		$+ ab + bb - bc$
Fact. tot.	$aa - 2ab + bb.$		$aa + 2ab + bb - ac - bc$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{rrr} 3a + b & & \\ 5a - 4b & & \\ \hline 15aa + 5ab & & \\ & - 12ab & - 4bb \\ \hline \textit{Fact.}\ 15aa & - 7ab & - 4bb \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r}
2a + 3b - 2c \\
4a + 5b \\
\hline
8aa + 12ab - 8ac \\
+ 10ab + 15bb - 10bc \\
\hline
\text{Fact. } 8aa + 22ab + 15bb - 8ac - 10bc
\end{array}$$

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l}
a^3 + b^2 \\
a^3 - b^2 \\
\hline
a^6 + a^3b^2 \\
\quad - a^3b^2 - b^4 \\
\hline
\text{Fact. } a^6 - b^4
\end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{c}
a^n + a^x - b^m \\
a^n \\
\hline
a^{2n} + a^{n+x} - a^n b^m
\end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{c}
a^2 + b^3d - d \\
a^3b^4 \\
\hline
a^5b^4 + a^3b^7d - a^3b^4d.
\end{array}$$

EXEMPLUM IV.

$$\begin{array}{c}
a + b^4 \\
a^6 + b \\
\hline
a^7 + a^6b^4 + ab + b^5
\end{array}$$

SCHOLION.

91. *Cum* (§.50.) *expressio per exponentes sit tantum modus scribendi brevior, idcirco, Tyrones ut multiplicationem quantitatum habentium exponentes menti fixius imprimant, exempla bina prioris casûs III. per modum hasce fusè scribendi, expressa damus, ut, si Tyro dubitaverit in casu simili, quomodo per abreviationem scribenda sint facta, hac methodo servata, seipsum instruat.* En exempla hujus casûs III. fusè descripta.

EXEMP. I. CASûS III. fusè.

$$\begin{array}{lll}
 & aaa + bb & \\
 & aaa - bb & \\
\hline
\text{Fusè} & aaaaaa + aaabb & \\
 & \quad - aaabb - bbbb & \\
\hline
\text{Factum} & aaaaaa \quad - bbbb. & \\
\hline
\text{Brevius} & a^6 \quad - b^4 &
\end{array}$$

EXEMP. III. CASÛS III. fusè.

$$\begin{array}{l} aa + bbbd - d \\ aaabbbb \\ \hline \text{Fusè } aaaaabbbb + aaabbbbbbbd - aaabbbbd \\ \hline \text{Brevius } a^5b^4 + a^3b^7d - a^3b^4d. \end{array}$$

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} 2a^3 - 4b + 1 \\ 5a^4b - 7 \\ \hline 10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b \\ \quad - 14a^3 + 28b - 7 \\ \hline 10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b - 14a^3 + 28b - 7 \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} a^5 + 4a - d^n \\ 3a^2 + 8 \\ \hline 3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n \\ \quad + 8a^5 + 32a - 8d^n \\ \hline 3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n + 8a^5 + 32a - 8d^n. \end{array}$$

SCHOLION.

92. *Ut doctrina de multiplicatione algebraica hactenus tradita clarior Tyronibus evadat, præsertim quæ de signis demonstrata sunt, exemplum I. casûs I. ad numeros, seu determinatas quantitates applicabimus, quam applicationem in omnibus exemplis Tyronibus faciendam suadeo. Sit igitur* a = 8, & b = 2

Erit

$$\begin{array}{l} a - b = 8 - 2 \\ a - b = 8 - 2 \\ \hline aa - ab = 64 - 16 \\ - ab + bb = \quad - 16 + 4 \\ \hline aa - 2ab + bb = 64 - 32 + 4 = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{sed } 8 - 2 = 6 \\ \& \; 8 - 2 = 6 \\ \hline \text{factum ex multi-} \\ \text{plicatione 6 per 6} \\ \hline \text{id est} = 36. \end{array}$$

CA-

CAPUT V.

De Divisione Algebraica.

DEFINITIO XVII.

93. *Divisio Algebraica* est producti, sive facti alicujus algebraici in suos factores *Resolutio*; & hinc *dividere algebraice*, est dato factore uno invenire alterum. *Ex.gr.* Dato facto algebraico *abc*, tanquam *dividendo*, datoque factore uno *a*, tanquam *divisore*, invenire factorem alterum *bc*, tanquam *quotum*, qui factores in se ducti produxerunt factum *abc*.

THEOREMA VI.

94. PROP. *Quantitas* negativa *divisa per quantitatem* positivam, *& vicissim* positiva *per* negativam, *pro quoto dat quantitatem* negativam. *Quantitas verò* negativa *divisa per* negativam, *dat* positivam; *seu universaliter*: signa eadem *in divisore, & dividendo, dant pro quoto* +, diversa *dant* −, *quemadmodum in multiplicatione ostensum est.*

DEMONSTRATIO.

95. Quod multiplicatio componit, hoc solvit divisio (§.121. Arith.) sed factum seu productum algebraicum per eandem regulam signorum componitur (§. 86.) ergo etiam per eandem signorum regulam

resolvi debet. Nam quotus, tanquam unus ex factoribus, multiplicatus per divisorem, tanquam factorem alterum, restituere debet dividendum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

96. In divisione itaque algebraica eadem regula studiosè observanda; nempe *signa in divisore, & dividendo eadem, dant pro quoti signo* $+$, *diversa* $-$.

SCHOLION.

97. *Cum usus divisionis algebraicæ actualis per* Problema infra tradendum, *haud frequens sit, propterea quod exacta hujusmodi divisio, seu resolutio in factores raro fieri possit, idcirco præcipua duntaxat exempla, quæ usui Tyronum futura sint, adferentur.*

PROBLEMA IV.

98. Prop. *Productum algebraicum in suos factores resolvere, seu Dividere algebraicè.*

Resolutio.

CASUS I. *Si* divisor *sit quantitas monomia nullo* coëfficiente, *aut* exponente *affecta*, & dividendus *similiter non sit affectus aliquo* coëfficiente, *aut* exponente.

I. Si litera, vel literæ divisoris reperiantur in omnibus dividendi membris, peracta habetur divisio, simpliciter delendo in membris dividendi literas divisoris, erunt reliquæ dividendi literæ quotus (§. 35.) observata tamen cautè regula signorum (§. 96.) tradita. *Vide exemp. I. cas. I.*

II. Si

II. Si aliquod membrum dividendi ſit idem cum diviſore, ſeu præciſè eadem quantitas literalis, pro quoto illius membri ſcribenda eſt *unitas*, ſeu numerus 1. *Vide exemp. II. caſ. I.*

III. Si in aliquo membro dividendi litera, vel literæ diviſoris non reperiantur, interpoſitâ lineâ exprimendus eſt quotus *juxta doctrinam* (§. 30.) *Vide exemp. III. caſ. I.*

CASUS II. *Si tam diviſor, quam dividendus ſint quantitates* polynomiæ *nullo aut* coëfficiente, *aut* exponente *affectæ.*

I. Ductis ad ſiniſtram, & dexram deorſum verſus lineis, includatur totus dividendus, diviſor ſcribatur ante lineam ſiniſtram dividendi, latus verò dextrum poſt lineam dextram deſerviat quotis ſcribendis. *Vide poſitionem I. in omnibus exemplis.*

II. Diviſoris polynomii membrum unum eligatur, quod placet, (*illud tamen præ cæteris eligendum, cujus litera, vel literæ in pluribus dividendi membris reperiuntur,*) cum quo tota diviſio peragenda eſt; nam uno ſemel aſſumpto, aliud diviſoris membrum intra eandem diviſionem aſſumere non licet.

III. Videatur in quo *dividendi* membro reperiatur aſſumptum membrum *diviſoris*, & reliquæ literæ membri dividendi, quæ in divisore non habentur, pro quoto scribantur, *ut in casu I. dictum*; servata regula de signis (§. 96.) adducta. *Vide positionem I. exempli I. cas. II.*

IV. Per hunc literalem quotum, juxta regulas multiplicationis algebraicæ, multiplicentur *omnia membra* divisoris, & facta partialia sub membis dividendi homogeneis scripta, subtrahantur algebraicè. *Vide exemp. I. casus II.*

V. Cum membris dividendi residuis, eodem modo per easdem regulas III. & IV. inquiratur in quotum literalem, donec facta subtractione ultima nihil remaneat, *vide positionem I. exempli I. casûs II.* si aliquid remaneat, quod porro dividi non possit, illud juxta Hypoth. (§. 30.) exprimendum erit. *Vide exemp. II. cas. II.*

SCHOLION.

99. *Plenam divisionis praxim Tyrones oretenus edocendi sunt, nec enim ea à Typothetis impetrare potui, quæ ad plenam necessaria fuerunt doctrinam. Hic quoque recolenda, quæ (§. 72.) dicta sunt, nullum videlicet, ordinem, aut in inquirendo quoto, aut in subtrahendis factis partialibus observari, sed quemadmodum quotum literalem partialem ex quocunque membro dividendi eruere liçet, ita facta partialia à quibusvis membris homogeneis subtrahi possunt.* Vide Paradigma exempl. divis.

CASUS III. *Si tam divisor, quam dividendus affecti sint* coëfficientibus.

Præter regulas cas. II. servanda isthæc:

per

per coëfficientem divisoris dividantur etiam coëfficientes dividendi arithmeticè. *Vide exempl. cas. III.*

CASUS IV. *Si tam divisor, quam dividendus affecti sint* exponentibus.

Servatis regulis supra adductis, si quantitates affectæ exponentibus in divisore sint homogeneæ quantitatibus dividendi, exponentes divisoris subtrahantur ab exponentibus dividendi, reliqua fiant, ut in casu I. *Vide exemp. I. & II. cas. IV.*

Regulæ harum Resolutionum demonstratione non egent, cum ex definitione divisionis (§. 93.) pateat, hac ratione inventum quotum in singulis membris esse factorem alterum dividendi, ut per multiplicationem divisoris in quotum liquet.

PARADIGMA

Exemplorum Divisionis Algebraicæ.

CASUS I, EXEMPLUM I.

Dividendus. Quotus totalis.

$$\textit{Divisor } a \left\{ \begin{array}{ccc} ab & +ac & -ad \\ | & | & | \\ a & a & a \end{array} \right\} b + c - d$$

NB. *Signum deletivum ad libitum est lineola* (|) *interposita.*

EXEMPLUM II.

Dividendus.

$$\textit{Divisor } -ab \left\{ \begin{array}{ccc} abc & -abdc & -ab \\ \| & \| & \| \\ -ab & -ab & -ab \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textit{Quotus.} \\ -c + dc + 1. \end{array}$$

Ex-

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{rl} & \textit{Dividendus} \qquad \textit{Quotus.} \\ \textit{Divisor } d & \left\{\begin{array}{ccc} db + & ad + & bc \\ | & | & \\ d & d & d \end{array}\right\} b + d + \frac{bc}{d}. \end{array}$$

CASUS II.

Exempla sequentium casuum desumpta sunt ex exemplis in multiplicatione adductis.

EXEMPL. I. quod est primum CAS. I. Multipl.

$$\begin{array}{lcll} & \textit{Dividendus} & & \\ \text{Positio I.} & \left\{\begin{array}{l} aa - 2ab + bb \\ aa - ab \\ - \quad + \end{array}\right. & \begin{array}{l} \textit{quot.part.} \\ a \\ \end{array} & \\ \textit{Divisor } a - b & & & \textit{Quotus totalis } a - b \\ \text{Positio II.} & \left\{\begin{array}{l} \textit{resid.} - ab + bb \\ - ab + bb \\ \textit{subt.} + \quad - \end{array}\right. & \begin{array}{l} \textit{quot.part.} \\ - b \\ \end{array} & \\ \textit{Divisor } a - b & & & \\ & 0 \quad 0 & & \end{array}$$

Scilicet, in Positione I. *assumpta ad libitum ex divisore litera* a, *dico*: a *in* aa, *dat quotum* a, *per hunc quotum* a *multiplico totum divisorem* a − b, *& factum* aa − ab, *subscribo membris homogeneis dividendi*, vide Position. I. *deinde subtrahendo mutantur signa in contraria, unde* − aa, *&* + aa *se destruunt, item* + ab *destruit ex* − 2ab *unum* − ab *adeoque remanet adhuc* − ab *residuum, ad hoc residuum depono tertium membrum dividendi* + bb, ut factum vides in Positione II.

In hac Positione II. iterum ex divisore assumpta eadem litera a, *dico*: a *in* − ab, *dat quotum* − b, *& per quotum* − b *multiplicando totum divisorem* a − b, *dat factum* − ab + bb, *unde subtrahendo, mutatis in contraria signis, membra sibi homogenea ex dividendo totaliter destruunt, & nihil residui reliquunt, itaque quotus totalis emersit* a − b, *qui per divisorem* a − b *multiplicatus restituit dividendum*, aa − 2ab + bb.

Ut veritas *Reg. II. Cas. II.* pateat, de assumendo ad libitum quocunque divisoris membro, in gratiam Tyronum idem exemplum repetere placet

placet assumendo ex divisore $a-b$ secundam literam, nempe $-b$, sit itaque

Dividendus.

$$\begin{array}{lllll}
\text{Positio I.} & \left\{\begin{array}{l} \ aa - 2ab + bb \\ fact. \ \ - ab + bb \\ subt. \ \ + \quad - \end{array}\right. & \begin{array}{l} quot.\,part. \\ -b \\ \end{array} & & \\
Divis.\ a-b & & & & Quotus\ totalis \\
\text{Positio II.} & \left\{\begin{array}{l} res.\ aa - ab \\ \ aa - ab \\ \ - \quad + \end{array}\right. & \begin{array}{l} quot.\,part. \\ +a \\ \end{array} & & -b+a. \\
Divis.\ a-b & \quad \text{o} \quad \text{o} & & &
\end{array}$$

In Positione I. assumpta igitur ex divisore litera $-b$, *dico*: $-b$ *in* $+bb$, *dat quotum* $-b$, *& multiplicando totum divisorem* $a-b$, *per* $-b$, *dat factum* $-ab+bb$, *subtrahendo mutatis signis fit* $+ab-bb$, *unde* $-bb$ *&* $+bb$ *se invicem destruunt*, *&* $+ab$ *ex* $-2ab$ *destruit unum* $-ab$ *unde remanet* $-ab$, vide Positionem I. *ad hoc residuum* $-ab$, *depono tertium membrum dividendi* aa, vide Positionem II.

In Positione II. retenta eadem divisoris litera $-b$, *dico*: $-b$ *in* $-ab$, *dat quotum* $+a$, *& multiplicando per quotum* a, *totum divisorem*, $a-b$ *dat factum* $aa-ab$, *mutatis itaque signis fit* $-aa+ab$, *unde cum* $-aa$ *&* $+aa$, *item* $+ab$ *&* $-ab$, *se invicem destruendo nihil relinquant, patet quotum totalem esse* $-b+a$, *qui idem est cum quoto operationis primæ*; $a-b$, *cum translocatio literarum non variet complexum.* (§.67.) *Ex hac operatione secunda, etiam liquet veritas tum Reg. III. cas. II. tum Coroll.* (§.72.) *adducti.*

EXEMPLUM II. CASUS II.

Dividendus

$$\begin{array}{llll}
\text{Positio I.} & \left\{\begin{array}{l} aa + 2ab + bb + dc \\ aa + ab \\ - \ \ - \end{array}\right. & \begin{array}{l} quot.\,part. \\ a \\ \end{array} & quot.\ totalis. \\
Div.\,a+b & & & \\
\text{Posit. II.} & \left\{\begin{array}{l} Resid.\ \ ab + bb + dc \\ Fact.\ \ \ ab + bb \\ Subtr. \ - \ \ - \end{array}\right. & \begin{array}{l} quot.\,part. \\ +b \\ \end{array} & a+b+\dfrac{dc}{a+b} \\
Div.\,a+b & & & \\
\text{Posit. III.} & \left\{\begin{array}{l} Residuum \quad +dc \\ \end{array}\right. & \dfrac{dc}{a+b} & \\
Div.\,a+b & & &
\end{array}$$

CASUS III.

Exemplum, quod est primum casûs II. multiplicationis.

Dividendus

$$\begin{array}{l|lll|l|l}
\text{Positio I.} & 15aa & -\ 7ab & -\ 4bb & \textit{quot. pa.} & \\
\textit{Div.}\ 5a-4b & 15aa & -12ab & & 3a & \textit{quotus} \\
 & - & + & & & \textit{totalis} \\
\hline
\text{Positio II.} & \textit{Resid.} & 5ab & -\ 4bb & \textit{quot. pa.} & 3a+b \\
\textit{Div.}\ 5a-4b & & 5ab & -\ 4bb & +b & \\
 & & - & + & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & &
\end{array}$$

CASUS IV.

Exemplum I. quod est primum cas. III. multiplicationis.

Dividendus

$$\begin{array}{l|lll|l|l}
\text{Positio I.} & a^6 & -\ b^4 & & \textit{quot. part.} & \\
\textit{Div.}\ a^3-b^2 & a^6 & -\ a^3b^2 & & a^3 & \textit{quot. tot.} \\
 & - & + & & & \\
\hline
\text{Positio II.} & \textit{Resi.} & a^3b^2 & -\ b^4 & \textit{quot. part.} & a^3+b^2 \\
\textit{Div.}\ a^3-b^2 & & a^3b^2 & -\ b^4 & +b^2 & \\
 & & - & + & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & &
\end{array}$$

Exemplum II. quod est secundum casûs III. multiplic.

Dividendus

$$\begin{array}{l|lll|l}
 & a^{2n} & +a^{n+x} & -\ a^n b^m & \textit{quotus totalis.} \\
\textit{Div.}\ a^n & a^{2n} & +a^{n+x} & -\ a^n b^m & a^n + a^x - b^m \\
 & - & - & + & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

SCHOLION.

100. *Examen divisionis fit ope multiplicationis algebraicæ; & vicissim examen multiplicationis fit per divisionem algebraicam. Tyrones sequentia corollaria ex praxi divisionis orta, perspecta habeant, ut ea, quæ inferius de resolutione problematum tractabuntur facilius intelligant.*

CO-

COROLLARIUM I.

101. Quemadmodum in multiplicatione (§. 89. caſ. II. reg. II.) ſi unus factorum careat coëfficiente, alter verò factorum affectus ſit aliquo coëfficiente, in facto invariatus præfigitur coëfficiens alterius factoris, ita in diviſione, ſi *dividendus* habeat coëfficientem, non item *diviſor*, in quoto manet invariatus coëfficiens. *Ex. gr.* Sit dividendus $3abd$, & diviſor db, erit quotus, $3a$; Ratio clara eſt, quia db eſt idem quod $1db$ (§. 48.) ſed unitas non dividit (§. 77. Arith.) ergo. Quodſi verò *diviſor* habeat coëfficientem, non item *dividendus*, pro quoto ſcribenda erit illa litera, quæ in diviſore non comparet, & ſubſcripto coëfficiente diviſoris per Hypotheſ. (§. 30.) exprimenda. *Ex. gr.* Sit dividendus, abd; diviſor $3bd$, erit quotus $\frac{a}{3}$ ut patet ex caſ. I. §. 98.

COROLLARIUM II.

102. Ex caſ. I. §. 98. colligitur, quod in complexo algebraico per hypotheſ. (§. 30.) expreſſo, *Ex. gr.* $\frac{ab+ac}{a}$, aut $(ab+ac):a$. deleri ſimpliciter poſſint literæ homogeneæ, tam in diviſore, quam dividendo, atque adeo loco hujusmodi expreſſionum, ſcribi poteſt, $b+c$, item loco hujus $\frac{xb+ax}{x}$, ſcribi poteſt. $b+a$. item $\frac{xb+b}{b}$, dat quotum $x+1$. aut $\frac{ac}{bc}$ quotum $\frac{a}{b}$ dat (§. 36.)

COROLLARIUM III.

103. Quoniam *Ex. gr.* $ax-bx$, eſt factum ex quantitate $(a-b).x$, ſi occurrat formula $\frac{ax-bx}{a-b}$, deletis ex formula utrobique, $a-b$,

umque volo Tyrones, in his quatuor algorithmis præcipue versati sint, seque exerceant sedulo, nam ulterius progressi sine facilitate tractandi hos algorithmos sæpe sæpius ad hos redire cogentur, non secus atque in arithmetica numerica, nemo ullus divisionem instituit, sine notitia additionis, subtractionis, & multiplicationis propterea, quod hæ operationes divisionis algorithmum ingrediantur.

CAPUT VI.

De natura, & proprietatibus fractionum in genere.

DEFINITIO XVIII.

107. *Fractio* est quantitas unitate minor, id est, pars, vel partes alicujus totius, quod totum per modum *unius* consideratur. *Ex. gr. 2. crucif. qui sunt partes duæ totius grossi per modum unius considerati.*

HYPOTHESIS XII.

108. *Fractio exprimitur, vel designatur per expressionem hypotheticam divisionis* (§. 30.) *declaratam.* Ex. gr. Algebraicè, $\frac{a}{b}$ vel $a:b$. Numericè, $\frac{3}{4}$ vel $3:4$.

SCHOLION.

109. *Expressio prior fractionis per lineam interjectam usitatissima est.* Ex. gr. $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$ *etsi duo puncta interposita æque fractionem indicent.*

erit quotus x, (non $x-x$) ut patet ex regula divisionis; item $\frac{ax+bx}{a+b}$ dat quotum x, (non $x+x$, seu $2x$); hinc in occurrente hujusmodi formula considerandum, an litera in dividendo sæpius repetita non compareat in divisore, hæc enim sola erit quotus, si cæteræ dividendi literæ in divisore compareant; sic, $\frac{ax+bx-cx}{a+b-c}$, valet tantum x.

COROLLARIUM IV.

104. Cum, quod ponit multiplicatio, tollit divisio (§. 121. Arith.) si in formula per divisionem expressa, *Ex. gr.* $\frac{x}{a+b}$, dividendus x multiplicari deberet per $a+b$, seu per divisorem suum, tali casu simpliciter delendus est divisor, manente solo dividendo; nam $\frac{x}{a+b}$ & idem x multiplicatum per $a+b$, dat factum $(ax+bx):a+b$, seu $\frac{ax+bx}{a+b}$, sed (per Corol. §. 103.) $\frac{ax+bx}{a+b}$, est $=x$. ergo.

COROLLARIUM V.

105. Divisio actualis per datas regulas fieri non potest, quoties litera, vel literæ divisoris non reperiuntur in membris dividendi. *Ex. gr.* Sit dividendus; $(ac+bc+cm)$ per divisorem, $(d+n)$; tali casu tantum exprimenda est divisio per hypothes. (§. 30.) videlicet, $\frac{ac+bc+cm}{d+n}$, cum $(d+n)$ non sit factor.

SCHOLION.

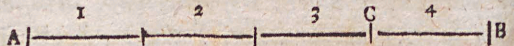
106. *Hæc de quatuor algorithmis adduxisse in compendio sufficiat Tyronibus, quorum plenior doctrina viva docentis voce dabitur; monitos iterum iterumque*

DEFINITIO XIX.

110. Literæ, vel numeri supra lineam scripti, vocantur *Numeratores*, infra lineolam positi, *Denominatores* appellantur, sic *in his* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$, Numeratores *sunt a*, *vel numerus* 3, Denominatores *verò* b, *vel* 4.

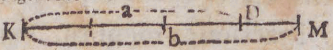
SCHOLION.

111. *Ratio, cur notæ infra lineolam scriptæ vocentur* denominatores, *supra lineolam positi* numeratores, *hæc est: quod nota inferior repræsentans totum per modum unius, denotet, aut exprimat, seu* denominet, *in quot partes illud unum totum sit sectum, seu divisum. Superior verò seu* numerator, *numerat, quot hujusmodi partes (quales denominator exprimit) ex* illo uno *sint accipiendæ ad hoc, ut valor fractionis cognoscatur.* Sic Ex. gr. *in hac fractione* $\frac{3}{4}$ *numerus* 4 *denominat illud unum esse sectum, seu divisum in quatuor partes, numerator verò* 3, *numerat seu dicit, tres partes ex illis quatuor accipiendas esse, ad constituendum valorem hujus fractionis* $\frac{3}{4}$. *Rem hanc ad oculum in gratiam Tyronum declarare juvat. Sit linea* AB *repræsentans unitatem* Ex. gr.



unam ulnam, sitque secta hæc linea AB *in quatuor partes æquales:* 1, 2, 3, 4. *Sint itaque exprimendæ, seu indicandæ tres partes* AC, *de hac linea, seu de una ulna* AB, *rectè igitur per fractionis expressionem sic indicabitur,* $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, *in qua expressione, clarum est, denominatorem* 4 *indicare totam unitatem seu ulnam* AB *in quatuor partes sectam, numeratorem verò* 3, *numerare tres hujusmodi partes (quæ sunt* AC*), de tota linea* AB *in quatuor partes secta.*

Idem algebraicè ostenditur in hac linea KM.



In qua tota linea KM *vocetur* Ex. gr. b, *partes* KD, *vocentur* a, *rectè algebraicè exprimetur linearũ fractio*: $\frac{a}{b}$.

COROLLARIUM I.

112. Hinc liquet *Primò*: fractionem *veram* esse, cujus *numerator* minor est suo *denominatore*, quia exprimit quantitatem unitate *minorem* (§. 107.). *Secundò*: Fractio vulgo *spuria* erit, si numerator sit *æqualis* suo denominatori, ut $\frac{b}{b}$ vel $\frac{4}{4}$, quia tali casu valor fractionis est æqualis toti unitati, *ut patet ex linea* AB (§. 111.) Multo magis *spuria* vocabitur, si numerator *major* sit suo denominatore, ut $\frac{5}{4}$, quia numerator plures partes numerat, quam sint in *denominatore*, seu in unitate. *Ut ex contemplatione lineæ* AB *clarum est.*

COROLLARIUM II.

113. Inter duas, vel plures ejusdem unitatis fractiones, id est, (quæ habent eundem denominatorem) illas esse quoad valorem *majores*, quæ habent *majores numeratores*, *Ex. gr.* $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ quia numerator 3, ex æqualibus ejusdem unitatis partibus, plures partes numerat, quam numerator 2. *Vide expressionem linearum* AB (§. 111.) Et hinc manifestum est, quod si manente eodem denominatore augeantur, vel minuantur numeratores, valores quoque fractionum augeantur, vel minuantur, id est, vel majores, vel minores quoad valorem efficiuntur, igitur universaliter, valores fractionum homogenearum à solis numeratoribus cognoscuntur.

DE-

DEFINITIO XX.

114. Fractiones dicuntur *homogeneæ*, ſeu *ejusdem denominationis*, quæ habent eundem denominatorem, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, aut $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, item $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$. *Heterogeneæ* appellantur, quæ ſub diverſis denominatoribus comparent, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{a}$, vel $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$.

DEFINITIO XXI.

115. Fractiones *ejusdem valoris*, ſeu æquales ſunt, quarum numeratores æqualiter continentur in ſuis denominatoribus; *Ex.gr.* $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ &c. *in quibus, numeratores ſinguli in ſuis denominatoribus* bis *continentur*, ſic pariter æquales ſunt, $\frac{6}{18}$ & $\frac{8}{24}$, quia in utraque numerator ter continetur in ſuo denominatore, quod per diviſionem innoteſcit.

SCHOLION.

116. *Obſervent Tyrones, æqualitatem* valoris *fractionum confundendam non eſſe, cum æqualitate* denominationis; *nam fractiones poſſunt eſſe æquales quoad valorem, quin habeant æquales denominatores, ut patet ex (§. 115.), & viciſſim, poſſunt habere æqualem denominationem quin tamen ſint æquales, quoad valorem, ut clarum eſt ex (§. 113)*

THEOREMA VII.

117. *Si ejusdem fractionis tam numerator, quam denominator multiplicetur;*

per

per eandem aliquam quantitatem tertiam, fractio nova ex productis orta, erit æqualis quoad valorem priori fractioni nondum multiplicatæ.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ cujus numerator a, & denominator b, multiplicetur per eandem quantitatem tertiam c, erit fractio nova ex productis orta $\frac{ac}{bc}$ sed $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ per (§.35. & 102.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{1}{2}$ cujus tam numerator, quam denominator multiplicetur per 3, & erit nova fractio $\frac{3}{6}$ sed $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ per (§. 115.) ergo.

THEOREMA VIII.

118. *Si tam numerator, quam denominator ejusdem fractionis exacte dividatur per eandem aliquam tertiam quantitatem, fractio nova ex quotis orta quoad valorem erit eadem, quæ fuit ante divisionem.*

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{ac}{bc}$ cujus numerator ac, & denominator bc dividatur per eandem tertiam quantitatem c, erit fractio nova ex quotis orta $\frac{a}{b}$ sed $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ per (§.117.) ergo. Q. E. D.

In

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{3}{6}$ cujus tam numerator, quam denominator dividatur per 3, erit nova fractio $\frac{1}{2}$ sed $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ per (§. 115. & 117.) ergo.

COROLLARIUM I.

119. Hinc si tam in numeratore, quam denominatore fractionis numericæ reperiantur zeri finales, deletis utrinque zeris numero æqualibus, fractionis valor non variatur *Ex. gr.* Loco $\frac{300}{6000}$ scribi potest $\frac{3}{60}$ item $\frac{20}{40} = \frac{2}{4}$, aut $\frac{600}{1200} = \frac{6}{12}$ &c. ratio patet, quia zeri finales oriuntur ex multiplicatione decadica, vel numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ergo per eosdem divisæ (quod fit delendo zeros) manent eædem.

COROLLARIUM II.

120. Ex hoc Theoremate patet ratio compendii (§. 76. Arith.) adducti, cum omnis divisio expressa per Hypothesim (§. 30.) repræsentet fractionem spuriam, in qua numerator est *dividendus*, denominator vero *divisor*.

COROLLARIUM III.

121. Idem Theorema suppeditat methodum, fractionem numericam in numeris majoribus exhibitam, redducendi ad numeros minores, valore fractionis invariato. Videlicet I. Dividendo exactè tam numeratorem, quam denominatorem per eundem aliquem numerum. *Ex. gr.* Sit fractio $\frac{12}{24}$, cujus numeratorem 12, & denominatorem 24 exactè dividat numerus 6, erit facta divisione per numerum 6, nova fractio æqua-

$\frac{2}{4}$ æqualis $\frac{12}{24}$ per (§. 118.) Item $\frac{30}{60}=\frac{3}{6}$ per (§. 119.) & dividendo $\frac{3}{6}$ per 3, erit $\frac{1}{2}$, ergo $\frac{30}{60}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. *Secundo:* Eadem hac methodo, fractio ad *minimos*, ut dicitur, *terminos* reducetur in casu, si numerator exacte dividat denominatorem suum; *Ex. gr.* in fractione $\frac{12}{24}$, cum 12 exacte contineatur bis in 24, si tam numerator, quam denominator, per 12 dividatur, erit fractio $\frac{1}{2}$ in terminis *minimis*.

SCHOLION.

122. *Reductio hæc ad terminos minores sua utilitate non caret; nam* Primo: *valor fractionis, si sit in numeris minoribus, facilius innotescit, sic facilius intelligitur, quota pars sit* $\frac{1}{2}$ *de uno floreno, quam* $\frac{36}{72}$ *unius floreni, etsi quoad valorem idem sint* $\frac{36}{72}$, *quod* $\frac{1}{2}$. Secundo: *Reductio hæc compendium subministrat operationum arithmeticarum, cum compendiosior sit modus operandi per parvos, quam magnos numeros.*

PROBLEMA V.

123. PROP. *Ex numero quocunque dato* integro, *efficere fractionem* vulgo *spuriam datæ denominationis, manente valore numeri integri invariato.*

RESOLUTIO.

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, erit *productum* numerator, cui, interposita lineola, subscribatur datus denominator. Q. E. F.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit quantitas integra *Ex. gr.* a reducenda ad datum denominatorem b, erit per datam resolutionem fractio spuria $\frac{ab}{b}$, sed $\frac{ab}{b}=a$, per (§. 35. & 102.) ergo. Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit ex numero 4, *facienda fractio spuria, quae habeat denominatorem* 6, *igitur multiplicando* 4 *per* 6, *erit productum* 24 numerator, *cui subscriptus datus* denominator 6, *exhibebit fractionem spuriam* $\frac{24}{6}$ *aequalem quoad valorem numero* 4 *integro.*

COROLLARIUM.

124. Hinc liquet methodus reducendi numerum integrum ad datae fractionis alicujus denominatorem; si nempe datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto addatur numerator fractionis datae, ac ducta lineola subscribatur prior datae fractionis denominator. *Ex. gr.* Sit numerus 3 reducendus ad denominatorem fractionis $\frac{2}{5}$, erit multiplicando 3 per 5, productum 15, cui addendo numeratorem 2, efficitur summa 17, & huic subscribendo denominatorem 5, erit fractio spuria $\frac{17}{5}$.

PROBLEMA VI.

125. PROP. *Datam fractionem vulgo spuriam ad integra reducere.*

RE-

RESOLUTIO.

Dividatur numerator per ſuum denominatorem, quotus erunt integra, vel cum, vel ſine fractione vera remanente. Q. E. F.

Demonſtratio algebraica patet; nam $\frac{ab}{b}=a$ per (§. 35. & 102.) Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit data fractio ſpuria $\frac{24}{6}$, *igitur dividendo* 24 *per* 6, *erit quotus* 4 *numerus integer. Item: ſit fractio ſpuria* $\frac{17}{5}$, *itaque dividendo* 17 *per* 5, *erit quotus* 3, *cum remanente fractione vera* $\frac{2}{5}$.

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Invenire, quid data quæcunque fractio valeat in data quavis certa ſpecie.* Ex. gr. *Si quæratur* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. in ſpecie cruciferorum, vel nummorum, quot faciunt cruciferos, vel nummos?*

RESOLUTIO.

Data ſpecies, in qua valor fractionis quæritur, multiplicetur per numeratorem datæ fractionis, factum dividatur per denominatorem ejusdem fractionis, & quotus dabit valorem fractionis quæſitum in data ſpecie. Q. E. F. *Demonſtratio dabitur in parte ultima hujus.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Ex. gr. *Quaeratur* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. quot faciunt cruciferos; igitur cum flor. Germ. habeat* 60 *xr. multiplicentur* 60 *per numeratorem* 3, *erit factum* 180, *hoc factum dividatur per denominatorem* 9, *&* *quotus emergens* 20, *erunt cruciferi, seu valor fractionis* $\frac{3}{9}$, *unius flor. Germ. in specie cruciferorum.* *Item* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. in nummis, quid valent? igitur cum* 120 *nummi faciunt flor. Germ. multiplicentur* 120 *per* 3, *&* *factum* 360, *dividatur per* 9, *erit quotus* 40, *seu nummi, quos valet data fractio* $\frac{3}{9}$.

Item: Quaeratur Ex. gr. $\frac{24}{32}$ *unius urnae Transylvanicae, quot faciunt mensuras? cum urna Transyl. habeat* 8 *mensur. multiplicentur* 8 *per* 24, *& factum* 192, *dividatur per* 32, *erit quotus* 6, *exhibens mensuras, quas valet data fractio* $\frac{24}{32}$ *unius urnae Trans.*

SCHOLION I.

127. *Problema hoc utilissimum, & in praxi summe necessarium est, quotiescunque certum quantum in datas partes distribuendum occurrit, quae distributio, cum ope divisionis indagari debeat, ut (§. 62. Arith.) dictum, plerumque autem quoto ex divisione orto adhaerere soleat fractio, quae indicat partem, vel partes aliquot unitatis, illius speciei, cujus erat dividendus, necessarium est ad aequam distributionem, ut sciatur, quid data fractio in specie illius unitatis valeat? res exemplo declaratur. Sint distribuendi* 26 *fl. Germ. in* 3 *pauperes, igitur ope divisionis Arithmet. invenietur quotus* $8\frac{2}{3}$ *unius flor. Germ. dandi cuilibet pauperi; sed* $\frac{2}{3}$ *unius flor. Germ. ignorantur, ergo per hoc problema operando, ut habeatur valor* $\frac{2}{3}$ *unius flor. Germ.* Ex. gr. *In nummis, multiplico* 120 *nummos (tot enim habet flor. Germ.) per numeratorem* 2, *&*

& factum 240, divido per denominatorem 3, erit quotus 80 nummi, igitur ex 26 florenis, cuilibet pauperi obveniunt 8 flor. & 80 nummi.

SCHOLION II.

128. *Ad hoc Problema rite tractandum necessariæ sunt* Tabulæ Reductionum, in Parte III. Arithm. *adductæ, ut sciatur in data quavis specie, quot unitates species major contineat ex specie minore*, vide usum tabularum (§. 140. *Arithm.*)

CAPUT VII.

De quatuor Algorithmis fractionum.

PROBLEMA VIII.

129. PROP. *Duas, vel plures fractiones* heterogeneas (§. 114.) *reducere ad fractiones* homogeneas (§. 114.) *seu ad eundem denominatorem, valore fractionum invariato.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si duæ fractiones reducendæ sint.* Multiplicetur tam numerator, quam denominator *primæ* fractionis, per denominatorem fractionis *secundæ*, & vicissim tam numerator, quam denominator fractionis *secundæ*, multiplicetur per denominatorem *primæ* fractionis, erunt reductæ ad eundem denominatorem valore fractionum invariato. Q. E. F.

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint reducendæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, erunt

 per

per datam resolutionem reductæ $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ & $\frac{c \cdot b}{d \cdot b}$, seu $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{db}$, habentes eundem denominatorem bd, sed habent etiam valorem priorem, nam $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ per (§. 117.) & $\frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$ per eundem (§. 117.) ergo. Q. E. F. & D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$, erunt reductæ per datam resolutionem, *prima* fractio $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}$, & *secunda* $\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4}$, seu *prima* $\frac{21}{28}$, *secunda* vero $\frac{20}{28}$, & hinc $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, & altera $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ per (§. 117.)

SCHOLION.

id est

$\frac{21}{28}$ $\frac{20}{28}$

130. In gratiam Tyronum ad firmandam memoriam, reductionem duarum fractionem sub hoc schemate exhibeo: in quo ductus linearum ostendit ad oculum, quod in prima fractione $\frac{3}{4}$, tam numerator 3, quam denominator 4 multiplicari debeat per denominatorem 7 fractionis secundæ; quodque in secunda fractione $\frac{5}{7}$ tam numerator 5, quam denominator 7, multiplicari debeat per denominatorem 4 fractionis primæ.

CASUS II. *Si plures fractiones reducendæ sint.*

I. Numerator fractionis primæ, multiplicetur per denominatorem secundæ, hoc fa-

factum multiplicetur per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum multiplicetur per denominatorem quartæ, & sic porro; erit productum ultimum numerator fractionis primæ.

II. Numerator fractionis secundæ multiplicetur per denominatorem primæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, (nam per proprium denominatorem multiplicari non debet) productum hoc per denominatorem quartæ, &c.

III. Eodem modo reliquarum numeratores multiplicandi sunt per omnes denominatores *aliarum* fractionum, (NB. *aliarum*) emanente videlicet proprio denominatore.

IV. Ut communis omnium denominator obtineatur, multiplicetur denominator fractionis primæ, per denominatorem secundæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum per denominatorem quartæ, & ita porro; erit productum omnium denominatorum, communis denominator omnium fractionum reductarum: hæ quatuor regulæ in sequente quinta regula universaliter continentur.

Regula universalis: Numerator fractionis reducendæ multiplicetur per denominatores *aliarum* fractionum, communis autem denominator, erit factum omnium denominatorum in se invicem ductorum. Q. E. F.

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint fractiones reducendæ.

Prima; $\frac{a}{b}$, *secunda* $\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{f}{g}$, *quarta* $\frac{m}{n}$

Erunt reductæ per datam Resolutionem

Prima: $\frac{adgn}{bdgn}$, *secunda* $\frac{bcgn}{bdgn}$, *tertia* $\frac{bdfn}{bdgn}$, *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn}$,

Sed per (§. 117.) *Prima* $\frac{adgn}{bdgn} = \frac{a}{b}$ *secunda* $\frac{bcgn}{bdgn} = \frac{c}{d}$

tertia $\frac{bdfn}{bdgn} = \frac{f}{g}$ *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn} = \frac{m}{n}$ *ergo.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ; $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$,

Erit numerator primæ; 2.5.7, *seu* 10.7 = 70.
secundæ; 4.3.7, *seu* 12.7 = 84.
tertiæ; 6.5.3 *seu* 30.3 = 90.

Comunis denominator; 3.5.7. *seu* 15.7 = 105

Igitur reductæ erunt

Prima; $\frac{70}{105}$, *secunda* $\frac{84}{105}$, *tertia* $\frac{90}{105}$.

SCHOLION I.

131. *Vulgo, & usitatissimè plures fractiones ad eundem denominatorem reductæ, semel tantum subscribendo denominatorem communem exprimi solent; sic adductum prius exemplum algebraicum, ita exprimitur* $\frac{adgn,\ bcgn,\ bdfn,\ bdgm}{bdgn}$ *datum item exemplum numericum sic scribitur vulgo* $\frac{70,\ 84,\ 90.}{105}$ *quæ expressio, priore compendiosior, idem prorsus significat.*

SCHO-

SCHOLION II.

132. *Quandoque in Reductione ad eundem denominatorem datur locus compendio. Videlicet I. per* (§. 117.) *si unius fractionis denominator major, alterius fractionis denominatorem minorem exactè aliquoties contineat, tali casu, si minor denominator, simulque & illius numerator, multiplicetur per eum numerum, quoties minor in majore continetur, manente illæsa altera fractione, habebuntur fractiones reductæ;* Ex. gr. *Sit Prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *in denominatore* primæ 10 *bis continetur, multiplicetur fractionis* secundæ $\frac{3}{5}$ *tam numerator* 3, *quam* denominator 5 *per* 2, *erit fractio* secunda $\frac{6}{10}$, *sub eodem denominatore, sub quo est* prima $\frac{4}{10}$

II. Locus est compendio per (§. 118.) *quando per eum numerum, per quem denominator minor in majore continetur, dividi potest exactè tam numerator, quam denominator fractionis habentis majorem denominatorem; manente illæsa altera fractione.* Ex. gr. *Sit prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *bis continetur in denominatore* 10, *numerus vero* 2 *exactè dividat tam numeratorem fractionis* primæ 4, *quam ejus denominatorem* 10, *igitur dividendo per* 2, *erit fractio prima* $\frac{2}{5}$, *sub eodem denominatore, sub quo est secunda* $\frac{3}{5}$; *Quoniam vero horum compendiorum rarior usus occurrit, hinc Tyrones problema reductionum, utpote universale, frequenti exercitio familiare sibi reddant oportet, cum fractiones heterogeneæ nec* addi, *nec* subtrahi *possint, nisi prius ope problematis antecedentis homogeneæ efficiantur.*

COROLLARIUM.

133. Quod si inter duas, vel plures fractiones heterogeneas quæratur, quænam illarum sit quoad valorem major, vel minor, ope hujus

problematis reductionum, quæstio resolvetur; nam si datæ fractiones reducantur ad eundem denominatorem, illa erit quoad valorem major, cujus numerator major erit. *Ex. gr.* Si quæratur inter datas fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{7}$, quænam illarum sit majoris valoris, erunt reductæ per (§. 129.) Prima $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$, secunda $\frac{6}{7}=\frac{24}{28}$, & hinc $\frac{6}{7}>\frac{3}{4}$, quia $\frac{24}{28}>\frac{21}{28}$ per (§. 113.)

DEFINITIO XXII.

134. *Addere fractiones*, est colligere valores partiales datarum omnium fractionum homogenearum in unam fractionem homogeneam, tanquam in unum totum, continens valorem omnium.

PROBLEMA IX.

135. PROP. *Fractiones quasvis datas addere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones addendæ sint homogeneæ, id est, ejusdem denominationis*, addantur tantum numeratores. Summæ omnium numeratorum subscribatur denominator communis. *Vide exempl. I. & II.* Q. E. F.

II. Si *fractiones sint heterogeneæ*, reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ addantur per Reg. I. hujus. *Vide exempl. III. & IV.* Q. E. F.

DE-

DEMONSTRATIO.

Valores partiales fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§. 113.) ergo fractio ejusdem denominationis, habens pro numeratore summam omnium numeratorum fractionum homogenearum, continet valores partiales omnium; jam verò *per Resolutionem hujus*, numerator fractionis ejusdem denominationis continet omnes numeratores datarum fractionum homogenearum, ergo continet valores partiales omnium, ergo *per datam resolutionem* habetur fractio homogenea tanquam totum, continens valorem omnium (§. 25. Arith.) ergo facta habetur additio fractionum. (§. 134.) Q.E.D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, *erit summa* $\frac{a+c}{b}$

EXEMPLUM II. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{3}{8}$ & $\frac{2}{8}$, *erit summa* $\frac{5}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ* $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ (§. 129.) & *hinc additæ*, $\frac{ad+cb}{bd}$, *vel sine reductione simpliciter* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

EXEMPLUM IV. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; *erunt reductæ per* (§. 129.) $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, & *hinc summa* $\frac{244}{105}$, *quæ per* (§. 125.) *dat integra* $2+\frac{34}{105}$.

SCHO-

SCHOLION.

136. *Quoniam ex additione fractionum plerumque emergit fractio vulgo spuria, hæc ad integra reducitur per (§. 125.) quemadmodum in exemplo IV. factum est. Examen verò additionis, fit per subtractionem.*

DEFINITIO XXIII.

137. *Subtrahere fractiones*, est invenire fractionem, quæ contineat differentiam valoris duarum fractionum homogenearum valore inæqualium.

PROBLEMA X.

138. PROP. *Fractionem valore minorem à fractione majoris valoris subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones sint homogeneæ;* numerator minor subtrahatur à numeratore majore, & residuo subscribatur denominator communis. *Vide exempl. I. & II.* Q. E. F.

II. *Si fractiones sint heterogeneæ;* reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ subtrahantur per Reg. I. hujus. *Vide exempl. III. & IV.* Q. E. F.

DEMONSTRATIO.

Valores fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§. 113.) ergo fractio homogenea, habens pro numeratore differentiam, seu residuum duorum

rum numeratorum, continet differentiam valoris duarum fractionum homogenearum; ſed *per datam Reſolutionem*, fractio homogenea exhibens reſiduum, continet differentiam numeratorum, ergo continet differentiam valoris earundem fractionum, ergo facta habetur ſubtractio fractionum (§.137.) Q. E. D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *ſubtrahenda fractio* $\frac{c}{b}$ *erit differentia* $\frac{a-c}{b}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{5}{8}$, *ſubtrahenda fractio* $\frac{3}{8}$ *erit differentia* $\frac{2}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *ſubtrahenda* $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, & *hinc differentia* $\frac{ad-bc}{bd}$, *vel etiam ſine reductione* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

EXEMPLUM IV. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{6}{7}$, *ſubtrahenda* $\frac{2}{3}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{18}{21}$ & $\frac{14}{21}$, & *hinc differentia, ſeu reſiduum* $\frac{4}{21}$.

SCHOLION.

139. *Examen ſubtractionis fit, ſi numerator reſiduæ fractionis, addatur ad numeratorem fractionis ſubtrahendæ, prodire debet numerator fractionis, à qua ſubtractio facta eſt; ſic ſi numerator differentiæ* $\frac{2}{8}$, *addatur ad numeratorem* $\frac{3}{8}$, *erit fractio* $\frac{5}{8}$ *ipſiſſi-*

ma,

ma, à qua subtractio facta est. Contra examen additionis fractionum fit per subtractionem, sic in dato Exemplo II. additionis fractionum (§. 135.) si à summa $\frac{5}{8}$, *subtrahatur* $\frac{3}{8}$, *prodire debet* $\frac{2}{8}$ *& vicissim.*

PROBLEMA XI.

140. PROP. *Fractiones per fractiones multiplicare.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicentur numeratores inter se, & factum numeratorum erit numerator novæ fractionis *Producti.*

II. Multiplicentur quoque denominatores inter se, & factum denominatorum erit denominator novæ fractionis *Producti. Vide exempl. I. & II.* Q. E. F.

SCHOLION.

141. *Demonstratio dabitur sequenti problemate, alia verò magis ordinata dabitur ad calcem* Partis ultimæ hujus.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint datæ fractiones $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *erit productum* $\frac{ac}{bd}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint multiplicandæ inter se $\frac{4}{5}$ *&* $\frac{6}{7}$, *erit productum* $\frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7}$ *seu* $\frac{24}{35}$.

SCHOLION.

142. *Illud à Tyronibus observatu dignum, quod fractio nova, producta ex multiplicatione fractionum,* (ut videre est in exemplo II.) *quoad valorem longe minor sit, quam valores singularum fractionum, ex quibus per multiplicationem fractio nova orta est, cum tamen in multiplicatione integrorum factum longe*

majus

majus producatur, quam ipsi factores sint. Ratio itaque hæc est; Quod si quantitas aliqua per 1 multicetur, ipsa quantitas invariata semel ponitur, ut clarum est; igitur si quantitas multiplicanda sit per aliquid minus unitate, id est per fractionem, minus necessario poni debet, quam sit ipse multiplicandus, igitur pars tantum multiplicandi poni debet pro facto, & hinc productum minus evadit, quam factores singillatim accepti.

PROBLEMA XII.

143. PROP. *Fractionem per fractionem dividere.*

RESOLUTIO.

I. Fractionis *dividendæ* numerator multiplicetur, per denominatorem fractionis *divisoris*, erit factum numerator fractionis novæ.

II. Fractionis *dividendæ* denominator multiplicetur per numeratorem fractionis *divisoris*, erit factum denominator fractionis novæ exhibentis *quotum*. *Vide exemp. I. & II.* Q. E. F.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit divisor $\frac{a}{b}$, *dividenda* $\frac{c}{d}$, *erit quotus* $\frac{bc}{ad}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit divisor $\frac{4}{5}$, *dividenda fractio sit* $\frac{24}{35}$, *erit quotus* $\frac{24 \cdot 5}{35 \cdot 4}$ *seu* $\frac{120}{140}$, *id est* $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ *per* (§. 121.)

DEMONSTRATIO.

Quotus multiplicatus per divisorem

æqua-

æquatur dividendo per (§. 61. Arith.) igitur quotus $\frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b}$ debet æquari dividendo $\frac{c}{d}$, ſed $\frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b} = \frac{bac}{bad}$ per (§. 140.) & $\frac{bac}{bad} = \frac{c}{d}$ per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

Demonſtratur quoque reſolutio prioris Problem. XI. de multiplicatione fractionum. Si factum, ſive productum dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum, per (§. 57. Arith.) igitur (*in exempl. I. problem. XI.*) productum $\frac{ac}{bd}$, ſi dividatur per unum ex ſuis factoribus $\frac{c}{d}$ prodire debet alter $\frac{a}{b}$, ſed $\frac{ac}{bd} : \frac{c}{d} = \frac{adc}{bdc}$ per (§. 143.), & $\frac{adc}{bdc} = \frac{a}{b}$, per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

SCHOLION I.

144. *Demonſtrationes hæ binæ, ſi in exemplis numericis adductis exhibeantur, veritatem ad oculum declarant, ſimulque examen ſeu probam multiplicationis per diviſionem, & diviſionis per multiplicationem edocent.*

SCHOLION II.

diviſ. $\frac{a}{b}$ *divid.* $\frac{c}{d}$

Quotus $\frac{bc}{ad}$

145. *In gratiam Tyronum reſolutionem problematis hujus de diviſione fractionum, ſub hoc ſchemate exhibeo: ubi ductus linearum, datas ſupra regulas manifeſte exhibent, nempe: quod* c *numerator dividendi multiplicari debeat per* b *denominatorem diviſoris, & denominator* d, *quod multiplicari debeat per* a *numeratorem divi-*

divisoris, ut prodeat quotus $\frac{bc}{ad}$. Aliter: *Invertatur divisor, id est, loco numeratoris scribatur denominator proprius, & loco denominatoris scribatur numerator, deinde fiat multiplicatio numeratorum inter se, itemque denominatorum inter se, ut* (§.140.) *dictum*, erit *nova fractio quotus*, Ex. gr. *sit dividendus* $\frac{c}{d}$, *divisor* $\frac{a}{b}$, *erit divisor inversus* $\frac{b}{a}$, *& hinc* $\frac{b \times c}{a \times d} = \frac{bc}{ad}$ *Quæ praxes in idem problema recidunt.*

SCHOLION III.

146. *Quotus, ex divisione fractionum ortus, major quoad valorem emergit ipso dividendo, imò sæpe ad fractionem vulgo spuriam assurgit, contra, ac in divisione integrorum fieri debere docuimus. Cujus ratio est, quod, quo minor sit divisor* (etiam in integris) *eo major emergat quotus, manente eodem dividendo; sic si* Ex. gr. 18 *dividatur per* 2, *quotus erit* 9, *è contra si dividatur per* 6 *quotus erit* $3 < 9$. *Igitur cum divisor in fractionibus, sit minor unitate, quotus prodire debet major, quam sit dividendus.*

SCHOLION IV.

147. *Quoniam in praxi arithmetica fractiones cum numeris integris frequenter tractandæ occurrant, plerique Arithmeticorum novas regulas integrorum cum fractis fuse proponere solent; nos labori Tyronum parcentes, simulque studentes compendio doctrinæ, artem numeros integros cum fractis tractandi non aliam proponimus, atque eam, quam de fractionibus hucusque exposuimus; hinc unico problemate universali algorithmos omnes numerorum fractorum cum integris complectemur, sit igitur.*

PROBLEMA XIII. ET UNIVERSALE.

148. PROP. *Algorithmos omnes fractorum cum integris tractare, id est*, Addere, Subtrahere, Multiplicare, & Dividere *integra cum fractis.*

RESOLUTIO.

I. Quantitas integra exprimatur per modum fractionis vulgo spuriæ, quod fit subscribendo unitatem loco denominatoris.

II. Sub hac ficta imagine fractionis tractetur tanquam fractio vera secundum omnia problemata fractionum hucusque tradita. *Vide exempla subjecta.* Q. E. F.

DEMONSTRATIO

Regula I. ostenditur. Data expressio fractionis, est expressio divisionis (§.108.) dividendus autem divisus per unitatem manet invariatus (§. 77. Arith.) ergo expressio hæc quantitatis integræ per fractionem vulgo spuriam non immutat valorem integri. *Quoad erat primum.*

Regula II. Fractio vulgo spuria habet imaginem fractionis, ergo tractari potest, per modum fractionis, ut *constat ex tota doctrina fractionum.*

EXEMP. ADDITIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *addenda in unam fractionem cum* $\frac{c}{b}$, *erit per datam Resolut:* $\frac{a}{1}$ *addenda ad* $\frac{c}{b}$, *&* *hinc addendæ per* (§. 135.) *igitur reductæ erunt per* (§.129.) $\frac{ab}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *quarum suma est* $\frac{ab+c}{b}$ *per* (§.135.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 *addendus cum* $\frac{2}{3}$, *in unam fractionem, erit numerus* 4 *sub ficta imagine fractionis* $\frac{4}{1}$ *igitur*

igitur addendæ sunt $\frac{4}{1}$ *ad* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 135.) *quare reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ & $\frac{2}{3}$ *per* (§. 129.) & *additæ in unam fractionem* $\frac{14}{3}$ *per* (§. 135.)

EXEMP. SUBTRACTIONIS ALGEBR.

Sit ex quantitate a subtrahenda fractio $\frac{c}{b}$, *ergo ex* $\frac{a}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{c}{b}$ *per* (§. 138.), *igitur reductæ erunt* $\frac{ab}{b}$ & $\frac{c}{b}$, & *hinc differentia* $\frac{ab-c}{b}$ *per* (§. 138.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit à numero 4 subtrahenda fractio $\frac{2}{3}$, *ergo ab* $\frac{4}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 138.) *igitur reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ & $\frac{2}{3}$, & *hinc differentia* $\frac{10}{3}$ *per* (§. 138.)

EXEMPLUM MULTIPLICAT. ALGEBR.

Sit quantitas a multiplicanda per $\frac{c}{b}$, *ergo* $\frac{a}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{c}{b}$ *juxta* (§. 140.) *erit igitur productum* $\frac{ac}{b}$ *per eundem* (§. 140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 multiplicandus per $\frac{2}{3}$, *ergo* $\frac{4}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{2}{3}$ *juxta* (§. 140.) *erit igitur productum* $\frac{8}{3}$ *per eundem* (§. 140.)

EXEMPLUM DIVISIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a dividenda per divisorem $\frac{c}{b}$, *erit dividendus* $\frac{a}{1}$, & *divisor* $\frac{c}{b}$ *igitur per* (§. 143.) *quotus* $\frac{ab}{c}$

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 dividendus per divisorem $\frac{2}{3}$, *erit dividendus* $\frac{4}{1}$ *& divisor* $\frac{2}{3}$ *igitur per* (§. 143.) *quotus* $\frac{12}{2}$

COROLLARIUM.

149. Eadem methodo procedendum est, si numerus complexus ex fracto & integro tractari debeat cum alio numero complexo itidem ex fracto & integro, aut numerus complexus ex fracto & integro, cum fracto tantum; nam subscribendo integris unitatem, tractentur ut fractiones. Idem est in literalibus.

SCHOLION.

150. *In adductis hucusque Theorematibus, ac problematibus fundamentalibus tota fractionum vulgarium, & simplicium doctrina continetur; de cæteris fractionibus potentiarum, ut sunt fractiones quadraticæ, cubicæ, &c. agetur in* Parte II. hujus; *de earundem progressionibus, & cæteris affectionibus in* Parte IV. *tractabitur. Ne verò aliquid à nobis desideretur præstitum fuisse, quod ab aliis quoque pertractatur, bina problemata, non quia necessaria, sed quod sua utilitate in certis circumstantiis non careant, adferemus.*

DEFINITIO XXIV.

151. *Communis mensura*, simpliciter, dicitur quantitas, major unitate, quæ alias binas, vel plures quantitates exacte metitur, quod per divisionem exactam innotescit; sic communis mensura respectu numerorum 8, & 12, est numerus 2, item numerus 4, quia per hos tam 8, quam 12 exactè dividitur; Hæc communis mensura vocatur etiam *Pars aliquota communis.*

DE-

DEFINITIO XXV.

152. Communis menſura (cum addito) *maxima*, dicitur quantitas, quæ, metiendo plures quantitates inæquales, eſt menſura maxima reſpectu quantitatis inter datas minimæ, prout cum aliis conjunctæ. Ita numerorum 8 & 12 communis menſura maxima eſt numerus 4, quia 4 reſpectu numeri 8 prout conjuncti cum numero 12, eſt diviſor *maximus*, qui numerum 8 & 12 ſimul exactè dividit.

COROLLARIUM.

153. Cum duorum, vel plurium numerorum communis menſura maxima, ſit diviſor, qui reſpectu numeri inter datos minimi, eſt maximus, ſequitur, quod ſi numerus inter datos minimus ſit diviſor reſpectu reliquorum, erit ipſe numerus inter datos minimus communis menſura omnium maxima, quæ in dato caſu haberi poteſt. *Ex. gr.* Sint numeri 8 & 16. cum 8 ſit menſura communis, & reſpectu ſui, & reſpectu numeri 16, cumque reſpectu ſui ſit maxima, erit etiam reſpectu numeri 16 prout conjuncti cum 8, menſura maxima, ita, ut ea major in dato caſu haberi non poſſit. cum diviſor reſpectu dividendi major eſſe nequit, quam ſit ipſe dividendus, per (§. 62. Arith.) ergo eidem æqualis, omnium maximus eſt.

PROBLEMA XIV.

154. PROP. *Invenire communem menſuram maximam, ſeu diviſorem communem maximum, per quem exactè dividendo tam numeratorem, quam denominatorem fractio-*

nis datæ, fractio reducitur ad terminos minimos possibiles.

RESOLUTIO.

I. *Denominator* dividatur per *Numeratorem*, quod si ex hac divisione nihil remaneat, erit ipse *numerator*, communis mensura maxima, per quam divisus tam numerator, quam denominator datæ fractionis, producit novam fractionem in terminis minimis. *Vide exempl. I.*

II. Si ex prima divisione denominatoris per numeratorem suum, relinquatur Residuum aliquod, sic procedendum erit; *Numerator* (qui fuit divisor) fiat *dividendus*, & Residuum fiat *divisor*, qui, si exacte dividat numeratorem sine residuo, erit hic communis mensura maxima. *Vide exempl. II.*

III. Quod si ex secunda divisione numeratoris per residuum, iterum emergat residuum, tum ex secundo *divisore* (qui fuit primum residuum) fiat iterum *dividendus*, & secundum residuum fiat *divisor*; atque hac alternativa methodo tamdiu procedendum est, donec inveniatur aliquis divisor major unitate, qui suum dividendum exactè sine aliquo residuo dividat, erit hic ultimus divisor communis mensura maxima respectu datæ fractionis, ut supra dictum.

IV. Quod si hac methodo procedendo semper aliquod residuum emergat, donec tandem ad divisorem perveniatur, qui sit *unitas*, cum unitas non dividat per (§.77. Arith.) signum est, datam fractionem ad minores terminos irreducibilem esse. *Vide exemplum III.*

EXEMPLUM I.

Sit fractio reducenda $\frac{36}{144}$ *erit*

Dividend.	144	*quotus.*
Divisor	36	4
fact. subt.	144	
Residuum	000	

Igitur dividendo tam numeratorem 36, *quam denominatorem* 144 *per* 36, *erit fractio* $\frac{1}{4}$ *in terminis minimis valore* $= \frac{36}{144}$

EXEMPLUM II.

Sit reducenda fractio $\frac{108}{144}$ *erit*

Dividend.	144	*quot.*
Divisor	108	1
Residuum	36	

Secundo.

Dividend.	108	*quot.*
Divisor	36	3
	108	
Resid.	000	

Igitur divisor maximus tam respectu numeratoris 108, *quam denominatoris* 144 *est* 36, *qui producit fractionē in terminis minimis* $\frac{3}{4}$ *æqualem datæ* $\frac{108}{144}$

EXEMPLUM III.

Sit reducenda $\frac{88}{105}$ *erit*

Divid.	105	1
Divis.	88	
Resid.	17	

secundo

divid.	88	5
divis.	17	
fa. sub.	85	
Resid.	3	

tertio

divid.	17	5
divis.	3	
fa. sub.	15	
Resid.	2	

quarto

divid.	3	1
divis.	2	
Resid.	1	

Cum ultimus divisor sit unitas, fractio $\frac{88}{105}$ *est irreducibilis.*

Algebraicè.

In fractione algebraica cum omnes factores pateant, Ex. gr. $\frac{abcd}{acdf}$ *deletis per* (§. 35. & 36.) *utrinque terminis homogeneis* acd ; *erit in terminis minimis prior fractio* $\frac{b}{f}$

DEMONSTRATIO.

Regula I. patet ex (§. 121.). Regula II. demonſtratur per gradationem retrogradam; nam diviſor ſecundus 36, ſeipſum ſeu 36 exacte dividit, ſed idem etiam exacte dividit diviſorem primum 108, ergo 36 exacte dividit quantitatem 36+108, ſed 36+108=144 per (§. 43. Arith.) ergo 36 eſt communis menſura, & quidem maxima reſpectu numerorum 108. & 144. Q. E. D. Eodem modo Reg. III. demonſtratur. Reg. IV. demonſtratione non eget, cum unitas, ad quam devenitur, non dividat, per (§. 77. Arith.).

SCHOLION.

155. *In hujusmodi diviſione, quotorum nulla habetur ratio. Cæterum moleſta hæc initio Tyronibus praxis, ſuppleri poteſt per methodum aliam tentativam; videlicet: ſi tam numerator, quam denominator finales numeros habeant pares*, Ex. gr. 2, 4, 6, 8. *Diviſio utriusque exacta tentanda per numeros pares. Si verò finalis unius ſit par, alterius impar, tentanda erit diviſio exacta per imparem, eodem modo ſi uterque ſit impar.*

DE-

DEFINITIO XXVI.

156. *Fractio fractionis*, vocatur fractio, quæ est pars, vel partes, alterius alicujus fractionis, seu est pars, vel partes, alicujus partis per modum unius consideratæ. *Ex.gr.* $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

SCHOLION.

157. *Claritatis gratia; sit linea* AB *primum divisa in* 5 *partes*

Sitque fractio de tota linea $\frac{4}{5}$, *quæ est Pars* AC, *Porro intelligatur quælibet pars quinta de* AB *subdivisa in tres particulas, vide figuram. Sit jam de hac ipsa parte* AC *indicanda pars* AD, *erit hæc* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{4}{5}$ *id est fractio* $\frac{2}{3}$ *est fractio fractionis* $\frac{4}{5}$

PROBLEMA XV.

158. PROP. *Fractionem fractionis ad fractionem simplicem reducere.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur, per (§.140.) numerator per numeratorem, & denominator per denominatorem illius fractionis, cujus hæc est fractio. Q. E. F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ *de fractione* $\frac{c}{d}$ *erit ad simplicem reducta* $\frac{ac}{bd}$ *per* (§. 140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit fractio $\frac{2}{3}$ *de fractione* $\frac{4}{5}$ *erit reducta ad simplicem* $\frac{8}{15}$. *Resolutio hæc jam demonstrata est* (§. 143.)

COROLLARIUM.

159. Liquet itaque *primo*: toties fieri fractionem fractionis, quoties fractiones quæcunque inter se multiplicantur per (§. 140.) *Secundo*: patet, per hanc reductionem innotescere valorem fractionis de fractione, ut clarum fit ex contemplatione lineæ AB in Scholio (§. 157.) adductæ. Nam AD, de AC, seu $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ faciunt revera de tota linea AB $\frac{8}{15}$. *Tertio* colligitur, si fractio fractionis addenda, subtrahendave sit ab aliis fractionibus, per hoc problema prius ad simplicem esse reducendam.

SCHOLION.

160. *De aliis fractionum proprietatibus agetur suis locis.*

FINIS PARTIS I.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

CAPUT I.

De quantitatum Potentiis, & Radicibus in genere.

DEFINITIO I.

161. PRoductum, seu *factum*, quod oritur, si quantitas quævis per seipsam semel, vel sæpius multiplicetur, vocatur *Potentia*, *Potestas*, vel *Dignitas*. *Ex.gr.* Si *a* per *a* multiplicetur, erit factum *aa*, *Potentia*, *Potestas*, vel *Dignitas*; idem est in numeris sic 3.3 seu 9, est *Potentia* &c.

DEFINITIO II.

162. Multiplicatio quantitatis per seipsam, vocatur *Elevatio*, vel *Evectio* quantitatis ad *Potentiam* &c. Quantitas verò illa, quæ elevatur, vel elevata est ad potentiam aliquam, vocatur *Radix*, vel *Latus* Potentiæ; aut etiam *prima Potentia*. Sic *a* est radix de *aa*, vel *aaa*, item 3 est radix de 3.3 seu de 9.

CO-

COROLLARIUM.

163. Omnis itaque quantitas secundum se considerata, & ex qua per elevationem, vel fieri potest, vel facta est potentia, vocari potest *Radix*.

SCHOLION I.

164. *Ut Tyrones genesim dignitatum tam in quantitatibus integris, quam in fractis recte intelligant, sequentem Tabulam contemplandam subjicio, quæ quantitatis monomiæ evectionem ad aliquot dignitatis gradus declarat. Sit igitur*

IN INTEGRIS.

Algebraicè.	Gradus Potentiæ.	*Numericè.*
$a^0 = 1$	*Nulla Potentia.*	$1 = 1$
$a = a^1$	Radix, *vel prima Potent.*	$3 = 3$
$aa = a^2$	Quadratum, *vel secunda Pot.*	$3 \cdot 3 = 9$
$aaa = a^3$	Cubus, *vel tertia Potent.*	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$aaaa = a^4$	- - *quarta Potent.*	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

&c. &c. in infinitum.

Universaliter; a^m *significat omnem potentiam, quam denotat exponens m.*

IN FRACTIS.

Algebraicè.	Gradus Potentiæ.	*Numericè.*
$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$	Radix, *seu prima Potent.*	$\frac{3}{4}$
$\frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$	Quadratum, *seu secunda Pot.*	$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$
$\frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$	Cubus, *seu tertia Potent.*	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{64}$

& ita in infinitum.

Universaliter; $\frac{a^m}{b^m}$ *significat omnem Potentiam.*

SCHO-

SCHOLION II.

165. *Ex attenta hujus tabulæ contemplatione sequentia Corollaria deducuntur: I. Exponentes accuratè indicare gradum datæ potentiæ, sic* a^2 *significat* secundam Potentiam, *seu* Quadratum; a^3 *exprimit* Cubum, *seu tertiam Potentiam;* a^4, *quartam*, a^5 *quintam Potentiam, & ita porro. II. Quadratum* aa, *seu* a^2 *generari, si radix per seipsam semel multiplicetur,* Cubum *verò* aaa, *vel* a^3 *generari, si* Quadratum aa *iterum per* a, *seu per radicem suam multiplicetur; & ita porro: III. Ad hoc, ut fracti ad dignitatem evehantur, opus esse, ut tam numeratores, quam denominatores eleventur.*

SCHOLION III.

166. *Eodem modo per exponentes exprimuntur gradus dignitatis, seu potentiæ quantitatum*, binomiarum, *vel polynomiarum; sic* $(a+b)^2$ *vel* $\overline{a+b}^2$ *significat totam quantitatem* $a+b$ *esse elevatam ad secundam potentiam, seu ad* quadratum; *item* $(a+b)^3$, *vel* $\overline{a+b}^3$ *significat* cubum, *seu tertiam* potentiam, *& ita porro. Idem est in numeris; sic* $(3+4)^2$ *est* quadratum, $\overline{3+4}^3$ *significat cubum; ut ex doctrina exponentium* (§. 50.) *data clarum est.*

SCHOLION IV.

167. *Nomina, & signa peculiaria gradumm* dignitatis, *quibus Arabes, & antiquiores mathematici usi sunt:* Ex. gr. Zensus, *vel* zensi-zensus, *aut* surdesolidus, quadrato-cubus, *& cætera beteroclyta, ommittenda potius duxi, quam Tyronum memoriam, obsoletis, & inter* Recentiores *abolitis nominibus, inutiliter onerare, quorum catalogi, quibus legendi animus est, in comentariis antiquiorum non sinè tædio passim videri possunt.*

HYPOTHESIS I.

168. *Quoniam signum* Radicale *est* √ *per* (§. 38.). *Numeri, vel literæ huic signo supra scripti, sunt* Exponentes, *quibus indicatur gradus potentiæ, cujus hæc est radix.*

Ex.

Ex. gr. $\sqrt[2]{\ }$, vel simpliciter sine exponente $\sqrt{\ }$, *indicat radicem* quadratam, *seu secundæ potentiæ. Sic* $\sqrt[3]{\ }$ *indicat radicem* cubicam *seu tertiæ potentiæ*, & $\sqrt[5]{\ }$ *radicem quintæ potentiæ, aut universaliter:* $\sqrt[n]{\ }$ *radicem cujuscunque potentiæ.*

SCHOLION I.

169. *Itaque* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa}$, *aut* $\sqrt{a^2}$ *significat radicem* quadratam *ex* aa, *quæ cum sit* a *per* (§. 164.) *erit* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa} = a$, *ita* $\sqrt{xx} = x$, & $\sqrt{aabb} = ab$ &c. *item* $\sqrt[3]{aaa}$, *vel* $\sqrt[3]{a^3} = a$, & *universaliter* $\sqrt[n]{a^n} = a$, *eodem modo in fractis* $\sqrt{\frac{aa}{bb}} = \frac{a}{b}$, & $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a}{b}$, *aut* $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$ &c.

SCHOLION II.

170. *Eodem modo in* polynomiis. $\sqrt[2]{(a+b)^2}$ *vel* $\sqrt{\overline{a+b}^2}$, *significat radicem* quadratam *de* $(a+b)^2$, *quæ est* $a+b$, *item* $\sqrt[3]{\overline{a+b}^3}$, *denotat radicem* cubicam &c. *Notent Tyrones quod signum radicale* $\sqrt{\ }$, *afficiat tantum quantitatem sibi ad dextram scriptam; sic in hac*, ab$\sqrt[2]{aa}$, *vel* $2\sqrt{ac}$, *signum* $\sqrt[2]{\ }$ *non afficit* ab, *vel* 2, *sed tantum* aa, *vel* ac, *est tamen quantitas antepostita signo* $\sqrt{\ }$ *coëfficiens, sic* $2\sqrt{aa}$ *significat* $\sqrt{aa} + \sqrt{aa}$.

SCHOLION III.

171. *Sunt qui Hypothesim expressionis radicalis per exponentes, non signo* $\sqrt{\ }$ *superscribendo exponentem, sed ad latus dextrum, interpositis inter exponentem, & dignitatem duobus punctis exprimunt; sic* Ex. gr. *loco hujus* $\sqrt[3]{ab^4}$, *scribunt.* $\sqrt{3 : ab^4}$,

vel

vel loco hujus $\sqrt[4]{\overline{a+b}^3}$, *ponunt* $\sqrt{4:\overline{a+b}^3}$, *verū etsi hujusmodi expressio versatis jam in Algebra nibil obturbet, Tyronibus tamen molesta, & perturbata accidit, atque hinc nos ea non utemur.*

DEFINITIO III.

172. *Radix rationalis*, aut *vera*, dicitur illa, quæ numeris exactè exprimi potest; sic numerus 3 (qui est $\sqrt[2]{9}$) est *rationalis*, quia $3.3=9$, ita quoque $\sqrt[3]{8}$, quæ est 2, est *rationalis*, quia $2.2.2=8$.

SCHOLION.

173. *Hinc* Radix irrationalis, *vel* surda *appellatur, quæ numero exactè exprimi non potest, licet in lineis geometricis dari queat; sic* surda, *vel* irrationalis *est* $\sqrt[2]{28}$; *quia nullus numerus per seipsum semel multiplicatus producere potest* 28, *nam* $5.5=25<28$, & $6.6=36>28$. *Sic surda est* $\sqrt[3]{34}$ *nam* $3.3.3=27<34$ & $4.4.4=64>34$.

DEFINITIO IV.

174. Radix *Imaginaria*, vel *Impossibilis* illa dicitur, quæ datur in potentia *negativa*, habente *exponentem* numerum parem 2, 4, 6, 8 &c. sic $\sqrt{-a^2}$, vel $\sqrt[2]{-4}$ imaginaria est, & impossibilis.

SCHOLION I.

175. *Radices hujusmodi dicuntur* impossibiles, *quod nec lineis, nec numeris exprimi possint, propterea, quia nulla quantitas per seipsam, adeoque sub eodem etiam* signo *multiplicata producere potest quantitatem negativam affectam exponente, qui sit numerus par. Sic* impossibilis *est* $\sqrt{-a^2}$, *quia* a.a *dat* $+a^2$ & $-a\times-a$, *dat etiam* $+a^2$, *per* (§. 86.) *ergo* $-a^2$

pro

produci non potest ex quantitate multiplicata per seipsam sub eodem signo; item impossibilis *est* $\sqrt[2]{-4}$, *quia tam* $+2$ *quam* -2 *per seipsum multiplicatum dat* $+4$, *per* (§. 86.) *dicitur autem* Imaginaria *propterea, quia saltem imaginatione nostra concipi potest, comparative nempe ad positivam, cui negative opponitur, eo prorsus modo, quo impossibilia concipere solemus. Neque tamen sua utilitate carent hæ radices imaginariæ, nam præterquam quod in Analysi numerorum indicent impossibilitatem Problematis, in Geometria flexus, & curvaturas linearum demonstrant.*

SCHOLION II.

176. *In potentia itaque* negativa *habente exponentem numerum imparem*, 3, 5, 7 *&c. radix non est* imaginaria, *aut* impossibilis, *sed vera, etsi* negativa. *Sic* $\sqrt[3]{-a^3}$, *est possibilis, & vera, est enim* $-a$, *nam* $(-a\times-a)\times-a$, *factum dat* $-aaa$ *seu* $-a^3$, *item* $\sqrt[3]{-64}$ *est* -4, *quia* $(-4\times-4)\times-4$ *producit* -64 *per* (§. 86.)

CAPUT II.

De ExtractioneRadicum quarumvis.

DEFINITIO V.

178. *Extractio Radicis*, est inventio quantitatis radicalis, quæ, aut elevata produxit datam potentiam, aut, si producere non potuit, saltem in illa proximè continetur.

SCHOLION.

179. *In specie* Extractio radicis quadratæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam semel multiplicata generavit* quadratum; *item*, Extractio radicis cubicæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam bis multiplicata produxit* cubum, *& ita porro.*

AXIO-

AXIOMA.

180. Omnis quantitas radicalis considerari, & exprimi potest, tanquam quantitas *binomia*, *Ex. gr.* $a+b$, aut $a-b$, item $x-y$, vel $x+y$.

COROLLARIUM.

181. Itaque omnis numerus radicalis monomius, exprimi potest per expressionem *binomiam*, sic numerus $7=2+5$, vel $3+4$, aut $1+6$ &c.

THEOREMA I.

182. PROP. *Omne Quadratum (generatum ex* √ binomia*) componitur ex tribus elementis;* Primo: *ex quadrato partis primæ radicalis;* Secundo: *ex duobus factis partium radicalium inter se;* Tertio: *ex quadrato partis secundæ radicalis.*

DEMONSTRATUR.

	Algebraicè.	*In Numeris.*	
Sit Radix binomia	$a+b$	$=2+5$	$=7$
Per seipsam multipl.	$a+b$	$=2+5$	$=7$
Erunt facta	$aa+ab$	$=4+10$	-
Partialia	$+ab+bb=$	$10+25$	-
Quadratum	$aa+2ab+bb$	$=4+20+25$	$=49$

Sed aa *est quadratum de parte prima radicis* a, *&* 2ab *est* a.b+a.b, *seu duo facta partium radicalium* a *&* b *inter se, & denique* bb *est quadratum partis secundæ radicalis* b, *ergo.* Vide Fig. 1. *In qua si linea* CD=DE *secta inæqualiter, vocetur* a+b; *hæ in se invicem* geometricè *multiplicatæ per* (§. 90. *Arit.*) *producunt* □ DCHE, *constans quadratis partium* aa *&* bb, *& duobus factis* ab. TAB. ALG. Fig. I. & 2.

Idem in Exemplo numerico; Vide Fig. 2. *in qua* DC *æqualis* DE *sit* Ex. gr. 7 *seu* 2 ✠ 5, *constabit totum* □ DCHE, *quadrato de* 2, *seu* □ 4, *& quadrato de* 5, *seu* □ 25, *& duobus factis* 10 ✠ 10, *seu* 20, *quæ simul faciunt* 49 = 7 . 7 = (2 ✠ 5) . (2 ✠ 5).

COROLLARIUM.

183. Cum omnis radix esse possit *binomia*, per (§. 180.) omne quadratum considerari potest generatum ex radice binomia. Itaque formula algebraica, *aa* ✠ 2*ab* ✠ *bb* universaliter repræsentat omne quadratum, sed hæc formula facta est per multiplicationem, ergo inquisiturus, seu extracturus radicem divisione opus est, utatur, cum quod multiplicatio ponit, tollat divisio per (§. 121. Arith.)

PROBLEMA I.

184. PROP. *Extrahere radicem quadratam ex quadrato Algebraico.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sit extrahenda radix

ex	□ *aa* ✠ 2*ab* ✠ *bb*	*a*	*Radix*
Subtrah.	✠ *aa* --- --		*a* ✠ *b*
	— --- --		
Resid.	✠ 2*ab* ✠ *bb*	✠ *b*	
Divis. 2*a*)	✠ 2*ab* ✠ *bb*		
Subtrah.	— —		
	0 . 0		

Itaque primo: Quia primum membrum aa *est quadratum de* a, *erit* √ aa = a *per* (§. 169.) *quæ locetur post lunulam, erit* a *pars prima radicis binomiæ.*

Secundo: *Ex hac inventa radice* a *fiat quadratum* aa, *quod subscriptum quadrato formulæ* aa, *& sub-*

subtractum destruit ex formula primum membrum aa, *remanentibus duobus membris* $2ab + bb$.

Tertio: *Quia in secundo membro* $2ab$ *continetur pars altera radicis* b, *quae est multiplicata per* $2a$, *&* *quia* $\frac{2ab}{2a} = b$ *per* (§. 35. & 98.) *itaque* $2ab$ *dividi debet per divisorem* $2a$, *&* *prodibit quotus* $+b$, *pars nempe altera radicis, quae ponatur post lunulam.*

Quarto: *Divisor* $2a$ *multiplicetur per quotum radicalem* b, *&* *factum* $+2ab$ *membro formulae homogeneo* $2ab$ *subscribatur. Fiat quoque quadratum ex* b, *quod est* $+bb$, *idque subscribatur membro formulae homogeneo* $+bb$, *unde subtrahendo tam* $-2ab$ *ex* $+2ab$, *quam* $-bb$ *ex* $+bb$ *nihil relinquent; igitur* $a+b$ *est* $\sqrt[2]{aa+2ab+bb}$.

SCHOLION.

185. *Hac itaque methodo universali ad numeros applicata ex quocunque numero radicem quadratam extrahere licet, ut paulo post in exemplo declaraturus sum; ante tamen, quam ad numeros descendamus, ut Tyronibus calculum faciliorem reddam, Tabulam sequentem subjicio.*

TABULA

Radicum, Quadratorum, & Cuborum in Numeris unitatum.

.	$\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt[2]{bb}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sqrt[3]{a^3}$ *vel* $\sqrt[3]{b^3}$
I.	$\square$ aa, *vel* bb	1	4	9	16	25	36	49	64	81	*Quadrata*
I,	*Cub.* aaa	1	8	27	64	125	216	343	512	729	*Cub.* bbb

Series I. *continet radices tam quadratas, quam cubicas;* Series II. *continet quadrata numerorum primae seriei;* Series III. *exhibet cubos eorundem numerorum primae seriei. Sic numerus* 2 *seriei primae est* $\sqrt[2]{}$ *de* $\square 4$ *seriei* II. *&* *idem numerus* 2 *est* $\sqrt[3]{}$ *de cubo* 8 *seriei* III.

PROBLEMA II.

186. PROP. *Extrahere radicem quadratam numericam.*

PARADIGMA EXTRACTIONIS $\sqrt[2]{\ }$.

Sit extrahenda $\sqrt[2]{\ }$ *ex numero* 189225.

Erit *formula resolutoria* $aa + 2ab + bb$.

Itaque.

		18.92,25 $\left\{\begin{matrix} a\ b \\ 4\ 3\ 5 \end{matrix}\right.$
Operatio I.	$aa =$	$-16\ldots$
	$2ab + bb =$	$*\ 292\ldots$
	Divisor $2a = 4.2 =$	$8\ldots$
Addend.	*duplū fact.* $2ab = 4.3.2 =$	$24\ldots$
	quadratum $bb = 3.3 =$	$..9..$
Sum̄a subtrahenda	$2ab + bb =$	$*\ 249\ldots$
Oper. II. Resid. *auctum*	$2ab + bb =$	$*4325$
	Divisor novus $2a = 43.2 =$	86
Addend.	*duplum fact.* $2ab = 43.5.2 =$	430
	quadratum $bb = 5.5. =$	$..25$
Summa subtrahenda	$2ab + bb$	$= *4325$
	Residuum	0000

a novum pro operatione II.

b novum ex operatione II.

Numerica extractio $\sqrt[2]{\ }$ *secundum formulam algebraicam sic procedit. Datus numerus distinguatur in classes à dextris sinistram versus, classibus singulis binas notas assignando* (*sinistima tamen etiam una constare potest*) *fit haec classificatio per binas notas ideo, quia quadratum de* 9, (*qui inter unitates maximus est*) *non excedit duas notas, est enim* $9.9 = 81$, *ut patet ex Tabula; haec classificatio ante operationem ostendit, tot notas numericas habituram radicem extrahendam, quot classes reperiuntur. Itaque operatio prima extractionis* $\sqrt[2]{\ }$ (*intuendo semper formulam algebraicam praefixam*) *eadem methodo, ut* (§. 184.) *dictum, procedit.*

I. Cum

I. Cum in numero classis sinistimæ 18 *(quem ex formula repræsentat* aa*) contineatur* □ *partis primæ radicalis* a*, quæratur in Tabula radicum in serie II. numerus quadratus æqualis, vel proxime respondens numero* 18*, qui reperitur esse* 16*, cujus superscripta radix numerica* 4 *ponatur post lunulam, voceturque* a ut in Paradigmate factum vides.

II. Fiat ex invento numero 4 *quadratum* aa = 4.4 = 16*, idque subtrahatur ex* 18*, erit residuum* 2*, ad quod ex secunda classe deponantur numeri* 92*, & habebitur numerus* ⁎ 292*, quem ex formula repræsentant membra formulæ*, 2ab ✠ bb.

III. Ut reperiatur pars altera radicis b *dividatur* 29 *per* 2a = 4.2 = 8*, & quotus* 3 *post lunulam positus vocetur* b*, quo reperto.*

IV. Resolvantur termini formulæ algebraicæ 2ab ✠ bb*, in numeros jam inventos radicis per* a *&* b *designatos. Erit itaque* 2ab = 4.3.2 = 24*, quod factum directe scribatur infra* 29 (vide Paradigma) *fiat quoque* □ bb = 3.3 = 9 *hoc una nota remotius versus dextram ita scribatur, ut respondeat ultimæ notæ* 2 *ex numero* 292. (vide Paradig.)

V. Sic collocati numeri 2ab *&* bb*, addantur, & habebitur summa* = ⁎249*, quæ summa* ⁎249 *subtracta à superiore numero* ⁎292*, relinquit residuum* 43*, ad quod residuum deponantur numeri tertiæ classis* 25*, erit summa* ⁎⁎4325 *pro secunda operatione, quem iterum ex formula algebraica repræsentant* 2ab ✠ bb.

Notandum: Quod si summa numerica ex *2ab ✠ bb* subtrahi non posset à superiore numero, signum est inventum quotum *b* deberi minui, & cum minuto *b* operationes Reg. IV. & V. repetendas esse.

187. *Inchoetur II. operatio, pro qua inventi jam numeri radicis* 43 *simul vocentur* a *novum.* (vide Parad.) *Ad inveniendum itaque* b *novum.*

I. Fiat novus iterum divisor ex novo a, *qui erit* 2a $= 43 \cdot 2 = 86$, *per quem dividendo* 432 *reperitur quotus* 5, *qui post lunulam positus vocetur* b novum.

II. Resolvantur iterum termini formulæ algebr. 2ab + bb *in numeros per* a & b novum *indicatos, erit* 2ab $= 43 \cdot 5 \cdot 2 = 430$, *qui directè infra numeros* ✱432 *scribatur*, & □bb $= 5 \cdot 5 = 25$, *una nota remotius juxta Reg. IV. scribatur.* Vide Parad.

III. Hi numeri sic collocati, & additi dant summam subtrahendam ✱4325, *quæ à superiore* ✱4325 *subtracta nihil relinquendo, indicant inventam radicem* 435 *veram, & rationalem esse numeri* 189225, *hujus rectæ inventæ radicis examen est, si* ($435 \cdot 435$) *producat* 189225. *per* (§. 179.)

SCHOLION.

188. *Hac itaque methodo operationis II. semper procedendum erit cum numeris reliquarum classium, si plures fuerint, observata cautè regula: quod pro subsequente quavis operatione, omnes numeri radicis per antecedentes operationes inventi, valere debeant* a novum, *solaque altera pars radicis* b, *per Reg. I. II. & III.* (§. 187.) *deinceps investigando eruatur.*

PROBLEMA III.

189. PROP. *Construere formulam universalem pro extrahenda radice quavis, id est, radicem binomiam* a + b *ad datam quamvis potentiam elevare.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur $a + b$, per $a + b$, dabit productum hoc secundam potentiam, seu *quadratum*; secunda hæc potentia iterum multiplicata per $a + b$, dat *Tertiam*, seu *Cubum*; tertia iterum multiplicata per $a + b$, dat *Quartam*, & ita porro procedendum, donec *exponens* membri primi

de

de a, & membri ultimi de b exprimat ipſam potentiam petitam, erit hæc formula univerſalis pro extrahenda radice petita. Q. E. F.

Reſolutio hæc per ipſam geneſim potentiarum demonſtratur.

SCHOLION.

190. *Hac methodo conſtructa eſt ſequens tabula quatuor potentiarum ex radice binomia* $a + b$ *productarum, quas in infinitum eadem methodo continuare licet.*

V, *ſeu* I. Potentia $= a + b$

□, *ſeu* II. Potent. $= a^2 + 2ab + b^2$

Cub. *ſeu* III. Potēt. $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

IV. Potentia $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Et ita in infinitum.

In his formulis pulcherrima, ac utiliſſima Theoremata, corollaria, ac praxes continentur, quas (quia referre libelli mole inhibemur) docentium explicationi, ac Tyronum attentioni, relinquimus.

PROBLEMA IV. UNIVERSALE.

191. PROP. *Datam cujusvis potentiæ radicem numericam extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Ut habeatur formula operationum, elevetur radix binomia $a + b$ ad datam potentiam, cujus radix quæritur per (§. 189.)

II. Ut propoſitus numerus ritè in claſſes diſtinguatur, tot notæ à dextris ſiniſtram

ſtram verſus cuivis claſſi aſſignandæ ſunt, quot unitates denotat exponens primi membri formulæ de *a*.

III. Ex claſſe ſiniſtima ſemper ſubtrahatur illa potentia, quam ex formula oſtendit primum membrum de *a*, ejus verò radix numerica ſcribatur poſt lunulam, quæ vocetur *a*, ad reſiduum ſiniſtimæ claſſis, ſi quod fuit, deponantur numeri claſſis ſecundæ.

IV. Juxta ſecundum membrum formulæ algebraicæ formetur ex inventa radice numerica *a* diviſor ad quærendum quotum, qui erit radix numerica *b*, qua reperta, reliqua omnia formulæ membra per *a* & *b* expreſſa reſolvantur in numeros inventæ radicis per *a* & *b* denominatæ, ut (§. 186.) dictum. *Vide Parad. ſubjectum.*

V. Reſoluta hæc facta numerica, ita ſub ſe invicem ſcribenda ſunt, ut notæ dextimæ ſingulorum factorum una nota remotius verſus dextram promoveantur. *Vide Paradigma ſubjectum*; hoc modo ſcripta hæc facta partialia addantur, addita à ſuprafcripto numero claſſis ſecundæ, auctæ per reſiduum ſi quod fuit, ſubtrahantur.

VI. Sic abſoluta claſſe ſecunda, eadem methodo cum claſſe tertia, & cæteris claſſibus procedendum erit, *aſſumendo ſemper pro formando novo diviſore a omnes jam*

re-

repertas (per antecedentes operationes) radices numericas, eæque per novum *a* denominatæ, & juxta membrum secundum formulæ in numeros resolutæ, erunt *novus* divisor pro inquirendo *novo b*, quo invento juxta *Reg. IV. & V. hujus* procedatur.

Quæ regulæ universales, ut clariores evadant, eas ad extrahendam radicem cubicam applicabimus, sit itaque extrahenda $\sqrt[3]{}$ *ex numero* 14886936, *erit per* (§. 189.). *Formula algebraica*,

aaa + 3aab + 3abb + bbb — *Radix*

14,886,936 ($\overset{a}{2}\overset{b}{4}$ 6

Operatio I. $aaa = 2.2.2 = 8 \ldots\ldots$ — *a* — *b*

$3aab + 3abb + bbb = *6886 \ldots$

Divisor $3aa = 2.2.3 = 12 \ldots$

Addend. $\begin{cases} 3aab = 4.2.2.3 = 48 \ldots \\ 3abb = 4.4.2.3 = {-96} \ldots \\ bbb = 4.4.4 = {--64} \ldots \end{cases}$

Subtrahend. $= *5824 \ldots$

Operatio II. $3aab + 3abb + bbb = *1062936$

Divis. nov. $3aa = 24.24.3 = 1728$

Addend. $\begin{cases} 3aab = 6.24.24.3 = 10368 \\ 3abb = 6.6.24.3 = {--2592} \\ bbb = 6.6.6 = {---216} \end{cases}$

Subtrahendus $= *1062936$

Residuum nullum = 0000000

novum operationis II. — *novum ex operatione II.*

SCHOLION.

192. *Quod si post subtractionem classis ultimæ residuum aliquod emergat, constat ex* (§. 174.) *radicem inventam non esse exactam, adeoque in proposito numero dari radicem irrationalem, & surdam, quæ licet a vera, deficere non possit una unitate radicali, quia tamen hic defectus radicalis* (*ob multiplicationem iteratam, per quam potentiæ generantur*) *defectum*

ſæpe inſignem in potentia producit; idcirco neceſſe eſt noſſe methodum per decimales, appropinquandi ad illam unitatem radicalem ita, ut, ſi placet, ne una millioneſima parte unitatis illius aberrare contingat; itaque.

PROBLEMA V. UNIVERSALE.

193. PROP. *Extracta radice proximè vera ex quavis potentia irrationali, approximare ad radicem veram per fractiones decimales.*

RESOLUTIO.

I. Extracta radice proximè vera per (§. 191.) ad reſiduum ultimum addantur tot zeri, quot unitates denotat præfixæ formulæ algebraicæ exponens primi membri de *a*; *Ex. gr.* In approximatione ad radicem quadratam, addantur zeri duo, in cubica, zeri tres, &c.

II. Cum hoc reſiduo zeris aucto procedatur ſecundum regulas IV. & V. (§. 191.) aſſumendo ſcilicet pro novo *a* totam radicem inventam, & per hanc inquirendo, juxta Reg. IV. & V. (§. 191.) in novum *b*, reperietur prima nota numeratoris, (quæ vocetur *b* novum) pro denominatore vero ſcribatur 10, & habebuntur partes decimæ, unitatis radicalis.

III. Ex hoc numeratore *b*, & cæteris notis per *a* novum denominatis formentur in numeris omnia membra formulæ præfixæ, *ut regula* IV. & V. (§. 191.) *dictum*, quibus additis, & ſubtractis, ad reſiduum iterum addantur tot zeri, quot exponens in formula præfixa ſignat, & aſſumendo

pro

pro novo a omnes notas radicis, una cum nota numeratoris, procedatur iterum ad inquirendum novum b, per easdem Reg. IV. & V. (§. 191.) quo reperto, & priori numeratori adjuncto, denominator augeatur uno zero, & habebuntur partes centesimæ, atque hac methodo reliquas numeratoris notas eruendo, & post singulas operationes denominatorem uno zero augendo, pervenietur tandem absoluta operatione sexta ad partes millionesimas.

In gratiam Tyronum subjungo approximationem ad radicem quadratam. In part. centesimis. Sit itaque extrahenda $\sqrt[2]{}$ *ex numero irrationali* 1286.

Formula algebraica $a^2 + 2ab + b^2$ b,b

12,86 (3 5 8 6 / 100 $a\ b$

$aa = 9$

$2ab + bb = *\ 386$ a

Divis. $2a = 3.2 = 6$

$2ab = 5.3.2 = 30$

$bb = 5.5 = 25$

Subtrahend. $= *\ 325$

Adproxim. I. *Resid. auct. zeris* ✻ 6100

Divisor $2a = 35.2 = 70$

$2ab = 8.35.2 = 560$

$bb = 8.8 = 64$

Subtrahend. = ✻ 5664

Adproxim. II. *Resid. auct. zeris* $*\ 43600$

Divisor nov. $2a = 358.2 = 716$

$2ab = 6.358.2 = 4296$

$bb = 6.6 = \text{---}36$

Subtrahend. $= *\ 42996$

Residuum pro approximatione III. 604

& ita porro progrediendum. SCHO-

SCHOLION.

194. *Extractio radicum, & approximatio eadem methodo peragitur in potentiis fractionum, extrahendo videlicet radicem datam tam ex numeratore, quam denominatore sic* $\sqrt{\frac{25}{64}}$ *erit* $\frac{5}{8}$. *Examen verò rectè inventæ radicis tam in integris, quam fractis est, si inventa radix elevata ad datam potentiam, una cum adjuncto residuo (si quod fuit) adæquet numerum, ex quo radix extracta est, ut tentanti in adductis supra exemplis patebit.*

PROBLEMA VI.

195. PROP. *Potentiam quamvis per exponentes expressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam.*

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ elevandæ multiplicetur per exponentem potentiæ ad quam elevari debet. Q. E. F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit a^3 *elevandum ad 2 potentiam, erit* $a^{3.2} = a^6$ *secunda potentia de* a^3., *sic* x^m *elevatum ad potentiam* n, *erit* x^{mn} & $(a+b)^3$ *elevatum ad 3 potentiam* $(a+b)^9$

Idem est in potentiis numericis per exponentes indicatis.

Demonstratio liquet; hæc enim multiplicatio exponentium tantum supplet vicem additionis iteratæ exponentium, quam fieri debere docuimus in multiplicatione quantitatum exponentibus affectarum in casu III. (§. 89.) nam a^3 elevatum ad se-

ſecundam potentiam eſt $a^3 . a^3 = a^{3+3} = a^6$ ergo. Q. E. D.

PROBLEMA VII.

196. PROP. *Ex data potentia per exponentes expreſſa, indicare per exponentes, extractam eſſe radicem datam quamvis.*

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ dividatur per exponentem datæ radicis. Q. E. F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit indicandum extractam eſſe $\sqrt[2]{}$ *de potentia* a^6 *erit* $\sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$, *item* $\sqrt[n]{x^{mn}} = x^{mn:n} = x^m$ *item* $\sqrt[3]{(a+b)^{9}} = (a+b)^{9:3} = (a+b)^3$ *&c.*

Demonſtratio clara eſt: Extractio radicis fit per diviſionem (§.191.), diviſionem autem quantitatum exponentibus affectarum fieri docuimus Caſ.IV. (§. 198.) per ſubtractionem, unde ſequitur diviſionem hanc ſupplere iteratam ſubtractionem, ſic $a^6 : a^3$ ſeu per ſuam radicem, eſt $a^{6-3} = a^3$, &c. Q. E. D.

SCHOLION I.

197. *Poſtrema duo Problemata uſum ampliſſimum habent in calculo radicum irrationalium de quo, in compendio ſequenti capite; nam ope horum problematum quantitates irrationales reduci poſſunt ad expreſſionem rationalium, ſub qua, ut rationales tractari poſſunt;*

possunt; *sic* $\sqrt[2]{a} = a^{1:2}$ *item* $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$ *aut* $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ *&c.*

SCHOLION II.

198. *De quatuor algorithmis potentiarum jam actum est* Parte I. *sunt enim potentiæ nihil aliud, quam quantitates affectæ exponentibus, & vicissim. Hinc* Additio *potentiarum fit per Cas. I. & II.* (§. 74.) Subtractio *per* (§. 78.) Multiplicatio *per Cas. III.* (§. 89.) Divisio *per Cas. IV.* (§. 98.) *Illud hic in divisione potentiarum notandum: quod si pro quoto prodeat potentia cum exponente negativo (ut fit in casu, quo* divisoris *exponens major est exponente* dividendi) *hujusmodi potentia sit fractio, cujus numerator est* 1, *denominator verò eadem potentia, sed cum exponente positivo; sic* Ex. gr. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, *nam* Ex. gr. $a^3 : a^5 = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa}$, *sed* $a^3 : a^5 = a^{-2}$ *per Cas. IV.* (§. 98.) *ergo* $a^{-2} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$ *Sic* $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ *&* $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ *&c.*

SCHOLION III.

199. *Locus hic esset agendi de potentiis affectis, & deficientibus, ac de earundem extractione radicis, item de inventione radicum verarum, & falsarum in formulis potentiarum reductis ad nihilum, qualis est*, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *quarum singulares observationes ex earundem natura, & genesi referunt cum Cartheſio, Hariotus, & cæteri Recentiores, quas, quia ij, qui ad sublimiorem Algebram perdiscendam animum adjecerint, facile ex Recentiorum Analyticorum libris petere possunt, nos (prima duntaxat principia Tyronibus tradentes) prætermittere cogimur, earumque loco calculum quantitatum irrationalium capite sequenti strictim pertractabimus, propterea, quod sine hujus notitia tam Recentiorum Mathematicorum, quam Philosophorum obvii calculi intelligi nequeant. Itaque.*

CA-

CAPUT III.

De calculo quantitatum, & radicum irrationalium, seu surdarum tam simplicium, quam compositarum.

DEFINITIO VI.

200. Radices *heterogeneæ* dicuntur, quarum exponentes radicales sunt heterogeneæ, ut (§. 54.) dictum, sic heterogeneæ sunt $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[s]{a^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt{18}$. Homogeneæ sunt, quæ eosdem habent exponentes radicales, sic $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{b^s}$ item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[2]{8}$.

PROBLEMA VIII.

201. PROP. *Quantitates irrationales heterogeneas reducere ad homogeneas.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sint reducendæ $\sqrt[n]{b^m}$ *&* $\sqrt[s]{a^r}$ *erunt per* (§. 196.) $\sqrt[n]{b^m} = b^{m:n}$ *&* $\sqrt[s]{a^r} = a^{r:s}$ *cum itaque exponentes de* $b^{m:n}$ *&* $a^{r:s}$ *sint expressio fractionum habentium diversos denominatores, hos reducendo ad eundem denominatorem per* (§. 129.) *erunt* $b^{ms:ns}$ *&* $a^{rn:ns}$, *ergo restituendo signa radicalia erunt* $b^{ms:ns} = \sqrt[ns]{b^{ms}}$ *&* $a^{rn:ns} = \sqrt[ns]{a^{rn}}$, *sed* $\sqrt[ns]{}$ *&* $\sqrt[ns]{}$ *sunt homogeneæ per* (§. 200.) *ergo.* Q. E. F. & D.

Eadem resolutio applicata ad radices surdas numericas veritatem problematis declarat.

PRO-

PROBLEMA IX.

202. PROP. *Quantitates irrationales ad expressionem simplicissimam, seu ad terminos minimos reducere.*

RESOLUTIO.

Videatur, an quantitates irrationales in factores suos resolutæ contineant factorem unum, qui sit potentia rationalis, ejusdem potentiæ, cujus est exponens radicis præfixæ, ex hoc factore actualiter extracta radix rationalis ponatur ante signum $\sqrt{\ }$, altero factore manente post signum $\sqrt{\ }$. Q. E. F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit reducenda $\sqrt[2]{aab}$, *quoniam* $\sqrt[2]{aab} = \sqrt[2]{b.aa}$, *erit per datam resolutionem* $\sqrt[2]{aab} = a\sqrt[2]{b}$, *item* $\sqrt[3]{abbb} = b\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt{48aabc} = \sqrt{3.16.aa.bc} = 4a\sqrt{3bc}$. *idem est in compositis, & fractis.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit reducenda $\sqrt{12} = \sqrt{3.4}$, *erit reducta* $2\sqrt{3}$, *item* $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8}$ *erit* $2\sqrt[3]{2}$.

SCHOLION.

203. *Quod si quantitas irrationalis, aut in factores resolvi non possit, aut nullus factorum sit potentia exponentis datæ radicis, quantitates hæ erunt irreducibiles, sic irreducibiles sunt* $\sqrt{7}$ & $\sqrt[3]{5}$, *item* $\sqrt{10} = \sqrt{2.5}$, *aut* $\sqrt{ab}$, *vel* $\sqrt[3]{aab}$.

DE-

DEFINITIO VII.

204. Si duæ, vel plures quantitates, ad expreſſionem ſimpliciſſimam reductæ, habentes eosdem exponentes radicales, habeant præterea eandem quantitatem poſt ſignum $\sqrt{}$ poſitam, quantitates hæ dicuntur *communicantes*, *Ex. gr.* $3\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$, item $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$ &c. in aliis expreſſionibus dicuntur *incommenſurabiles*.

PROBLEMA X.

205. *Addere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

Ante operationem reducantur per (§.202.) ad expreſſionem ſimpliciſſimam.

CASUS I. Si quantitates reductæ fuerint *communicantes* (§. 204.) quantitates ante ſignum $\sqrt{}$ poſitæ addantur, ut (§.74.) dictum, harum ſumma uni quantitati radicali præfixa, erit ſumma quæſita. Q. E. F. *Vide exempl. I. & II. caſ. I.*

CASUS II. Si quantitates irrationales ſint irreducibiles, aut *incommenſurabiles*, addendæ ſunt, ut quantitates heterogeneæ per caſ. II. (§.74.) *Vide exempl. I. & II. caſ. II.*

CASUS I. EXEMP. I. ALGEBRAICUM.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Sint}\\ \textit{Add.}\end{array}\right(\begin{array}{l}\sqrt{4aab}-\sqrt{9aabc}\ \textit{erunt}\ 2a\sqrt{b}-3a\sqrt{bc}\ \textit{per}\\ \sqrt{16aab}-\sqrt{aabc}\ \textit{reduct.}\ \underline{4a\sqrt{b}-a\sqrt{bc}}\ (\S.202.)\end{array}$$

$$\textit{Summa}\quad 6a\sqrt{b}-4a\sqrt{bc}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Sint}\\ \textit{Add.}\end{array}\right(\begin{array}{l}\sqrt{48}-\sqrt{50}\ \textit{seu}\ \sqrt{3.16}-\sqrt{2.25}\ \textit{erunt}\ 4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\\ \sqrt{12}+\sqrt{162}\ \textit{seu}\ \sqrt{3.4}+\sqrt{2.81}\ \textit{reduct.}\ \underline{2\sqrt{3}+9\sqrt{2}}\end{array}$$

$$\textit{Summa}\quad 6\sqrt{3}+4\sqrt{2}$$

CASUS II. EXEMPLUM I. ALGEBR.

$$\begin{array}{l}\sqrt{ab}+a\sqrt{b}\\ \underline{\sqrt{cd}-a\sqrt{c}}\end{array}$$

$$\textit{Summa}\quad \sqrt{ab}+a\sqrt{b}+\sqrt{cd}-a\sqrt{c}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{l}\sqrt{7}+2\sqrt{3}\\ \underline{\sqrt{5}-2\sqrt{6}}\end{array}$$

$$\textit{Summa}\quad \sqrt{7}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{6}.$$

PROBLEMA XI.

206. PROP. *Subtrahere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

CASUS I. Si quantitates irrationales per (§. 202.) reductæ fuerint *communicantes*, quantitates ante $\sqrt{}$ positæ subtrahantur, ut homogeneæ per (§. 78.) *Vide exempl. I. & II. cas. I.*

CASUS II. Si fuerint *incommensurabiles*, tractentur ut heterogeneæ. *Vide exempl. I. & II. cas. II.*

EX-

CASUS I.

EXEMP. I ALGEBR.

$$6a\sqrt{b} - 4a\sqrt{bc}$$

Subtr. $4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc}$

$$- \quad +$$

Resid. $2a\sqrt{b} - 3a\sqrt{bc}$

EXEMP. II. NUMER.

$$6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$$

Subtr. $2\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$

$$- \quad -$$

Resid. $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

CASUS II.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\sqrt{ab} + a\sqrt{b}$$

Subtrah. $\sqrt{a} - a\sqrt{cb}$

$$- \quad +$$

Resid. $\sqrt{ab} + a\sqrt{b} - \sqrt{a} + a\sqrt{cb}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\sqrt{7} - 2\sqrt{6}$$

Subtrah. $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$

$$- \quad +$$

Resid. $\sqrt{7} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

PROBLEMA XII.

207. PROP. *Multiplicare quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an quantitates radicales ſint homogeneæ per (§. 200.) ſi homogeneæ ſint, multiplicentur quantitates ante ſignum poſitæ, per quantitates ſigno $\sqrt{}$ antepoſitas, & quantitates poſt ſignum poſitæ, per quantitates ſigno $\sqrt{}$ poſtpoſitas, ut (§. 89.) dictum. *Vide exempl. I. II. III. & IV.*

II. Si ſint heterogeneæ (§. 200.) reducantur prius ad eandem denominationem per (§.201.) reductæ multiplicentur per Reg. I. *Vide exempl. V.*

EXEMPL. I. ALGEBR.

$$\begin{array}{ll} \textit{Facto-} & \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \textit{res.} & \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ \hline \textit{fact.} & \sqrt{aa} + \sqrt{ab} \\ \textit{part.} & \qquad - \sqrt{ab} - \sqrt{bb} \\ \hline \textit{fact.} & \sqrt{aa} - \sqrt{bb} = a - b \end{array}$$

EXEMPL. II. NUMER.

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline \sqrt{9} + \sqrt{6} \\ \qquad - \sqrt{6} - \sqrt{4} \\ \hline \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2. \end{array}$$

EXEMP. III. ALGEBR.

$$\begin{array}{l} a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \\ \qquad c\sqrt{m} \\ \hline ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm}. \end{array}$$

EXEMP. IV. NUMER.

$$\begin{array}{r} 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} \\ -4\sqrt[3]{5} \\ \hline -8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10} \end{array}$$

EXEMPLUM V. ALGEBRAICUM.

Sint multiplicandi $\sqrt[n]{b^m}$ *per* $\sqrt[s]{a^r}$, *erunt reductæ per* (§. 201.) $\sqrt[ns]{b^{ms}}$ & $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, & *hinc factum* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$.

Eodem modo tractandæ ſunt radices numericæ heterogeneæ.

PROBLEMA XIII.

208. PROP. *Dividere quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

I. Si ſint homogeneæ radicales (§. 200.) dividantur quantitates ante $\sqrt{}$ poſitæ

ſitæ per antepoſitas, poſt poſitæ per poſtpoſitas, ut (§.98.) dictum. *Vide exempl. I. & II.*

II. Si ſint heterogeneæ, reducantur prius ad homogeneas per (§. 201.) reductæ dividantur per Reg. I. *Vide exemp. III.*

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Diviſor *Dividendus* *Quotus*

$$c\sqrt{m}\left\{\begin{array}{l} ac\sqrt{bm}-cc\sqrt{dm} \\ ac\sqrt{bm}-cc\sqrt{dm} \\ - \qquad\quad + \end{array}\right\}a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$-4\sqrt[3]{5}\left\{\begin{array}{l} -8\sqrt[3]{20}+12\sqrt[3]{10} \\ -8\sqrt[3]{20}+12\sqrt[3]{10} \\ + \qquad\quad - \end{array}\right\}2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}$$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit dividendus reductus per (§. 201.) $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$ *diviſor* $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, *erit* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}} : \sqrt[ns]{a^{rn}} = \sqrt[ns]{b^{ms}} = b^{ms:ns} = \sqrt[s]{b^{m}}$.

SCHOLION I.

209. *Eodem modo tractantur radices radicum, ſeu quantitates ſub duplici ſigno radicali,* Ex. gr. $3\sqrt{\sqrt{2}}$, *aut* $(3+\sqrt{5})\sqrt{6}$, *modo obſervetur, quod quantitates aut duplici ſigno radicali antepoſitæ, aut parentheſi incluſæ, tractari debeant ut rationales; quarum calculus videri poterit apud authores infra referendos.*

SCHO-

SCHOLION II.

210. *Calculus radicum imaginariarum eodem modo peragitur, quo realium, modo notetur in multiplicatione, & divisione signa negativa post radicale signum posita non mutari in positiva, alias ex quantitate imaginaria, & impossibili fieri posset realis, & possibilis, quod est absurdum; hinc regulæ de signis (§. 86. & 96.) traditæ tantum respectu signorum ante* $\sqrt{}$ *positarum locum habent. Sic*

Si $\sqrt{-50}$ *addenda sit ad* $\sqrt{-8}$, *erit* $\sqrt{-50} = \sqrt{-2 \cdot 25} = 5\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-8} = \sqrt{-2 \cdot 4} = 2\sqrt{-2}$ *per* (§.202.) & *hinc summa* $5\sqrt{-2} + 2\sqrt{-2} = 7\sqrt{-2}$ *id est* $\sqrt{-2 \cdot 49} = \sqrt{-98}$.

Item

Ex $\sqrt{-98}$ *subtrahendo* $\sqrt{-8}$, *erunt reductæ,* $\sqrt{-98} = 7\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-8} = 2\sqrt{-2}$, & *hinc differentia* $7\sqrt{-2} - 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2}$.

Pariter multiplicando $\sqrt{-6}$ *per* $\sqrt{-3}$ *dat factum* $\sqrt{-18}$, & *dividendo* $\sqrt{-18}$ *per* $\sqrt{-3}$ *dat quotum* $\sqrt{-6}$. *Sed & de his, cum nobis prolixioribus esse non liceat, plura ex infra citandis authoribus petenda erunt.*

SCHOLION III.

211. *Non ignoro celeberrimos Italiæ Analystas docere multiplicando, vel dividendo radices imaginarias per imaginarias, signa — mutari debere in* +, *quod ipsum* Cl. D. Martine *pluribus ostendere conatur. Sed enim adverto, radicem imaginariam non esse negativam, uti nec est positiva, nam propterea impossibilis asseritur, quod nec sit positiva, nec negativa; nunquam itaque intelligere poteram, ut ex quantitatibus, quæ nec positivæ, nec negativæ forent, quantitas produci queat positiva, uti assequi non possum, quo modo ex duobus entibus involventibus contradictionem, componi possit ens unum possibile.*

FINIS PARTIS II.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS III.

De Analysi speciosa, seu arte resolvendi problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

CAPUT I.

Axiomata, Præcepta, & Praxes universales totius artis Analyticæ.

DEFINITIO I.

212. ÆQuatio, dicitur formula algebraica exprimens per interpositionem signi $=$ certas quantitates quomodocunque affectas esse sibi invicem æquales, vel etiam æquales nihilo: *Ex. gr.* $ax + c = ab - d$, vel $3 + 5 - 2 = 6$, aut $ax - ab = 0$.

SCHOLION I.

213. Æquationis *itaque formula exprimit quantitates omnes simul acceptas, & ante signum* $=$ *positas, æquales esse quoad valorem omnibus quantitatibus simul sumptis, & post signum* $=$ *positis, seu quod idem est, quantitates ad latus sinistrum signi* $=$ *positas æquivalere quantitatibus ad latus dextrum signi* $=$ *collocatis, ut ex hactenus dictis constat.*

SCHOLION II.

214. *Cum unicum medium, quo utitur Algebra ad resolvendas quæstiones etiam abstrusissimas, sit* Æquatio, *seu* Æqualitatis *expressio, totum artis Analyseos artificium fundatur in inventione Æquationis, & arte reducendi (per axiomata de Æqualitate quantitatum,) datam Æquationem ad unum terminum incognitum, ita, ut ex una Æquationis parte obtineatur unus solus terminus incognitus liber ab omnibus aliis tam cognitis, quam incognitis terminis, ex alia verò Æquationis parte meri termini noti habeantur; quod, qua ratione ritè fieri debeat, in quinque operationes artem universam resolvendi quæstiones distinguo, in quibus, si Tyro Analysta rectè exercitatus fuerit, nihil tam reconditum proponi eidem poterit, cujus solutionem, harum operationum ope, daturus non esset. Prima itaque operatio Analystæ erit:* I. Quæstionis propositæ accurata omnium circumstantiarum discussio, & perfecta, perspectaque propositi status quæstionis intelligentia. II. Apta & debita quantitatum, tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio. III. Inventio, & expressio Æqualitatis, IV. Reductio Æquationis, & V. Æquationis reductæ in numeros resolutio, *vel* figuræ constructio *de quibus in compendio jam specialius.*

OPERATIO I. ANALYSEOS.

215. Quæstionis resolvendæ accurata omnium conditionum, & circumstantiarum discussio.

I. Analysta resoluturus problema aliquod, considerabit primum accurate, quis sit status quæstionis, seu quid petatur inveniendum? quo cognito.

II. Conditiones, & circumstantias in quæstione resolvenda appositas sedulo evolvet.

III. Inquiret in quantitates notas; & ignotas, quænam dentur cognitæ; quæ incognitæ lateant.

IV. Intelligere adlaboret, quænam sit illa quantitas incognita, à cujus notitia dependet solutio problematis, & quamnam relationem quantitates cæteræ ad hanc habeant.

V. Quæ-

V. Quænam quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) ex ipsis conditionibus in problemate appositis, dicantur vel inter se, vel cum tertia aliqua quantitate æquales, aut saltem proportionales. His rite intellectis procedat Analysta ad operationem II.

OPERATIO II.

216. Apta, & debita quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio.

I. Quantitates notas per primas, ignotas per ultimas Alphabeti literas denominet, ut (§. 4. & 5. item 41. 42. & 43.) dictum.

II. Quando occurrunt plures quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) quæ ob certam relationem ex discussione quæstionis notam, paucioribus literis exprimi possunt, id præstat faciendum, ad facilitandam operationem Reductionis, ut si dentur duæ incognitæ Ex. gr. x *&* y*, constat autem* y *esse duplum de* x*, loco* y*, scribo* 2x*, item si esset* y *subduplum seu una dimidia pars de* x*, eam per* $\frac{x}{2}$ *melius denominabit Analysta, quam per* y*, & ita de aliis.*

III. Denominationem factam ad latus folii aliquod seorsim & distincte, (adscriptis etiam eorum nominibus in quæstione adductis, interposito signo $=$*) sibi adnotet Analysta, tum ne è memoria elabantur quantitates, pro quibus substitutio literarum facta est, tum ut Resolutio Æquationis reductæ ordinatè peragatur.*

OPERATIO III.

217. Quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum in formulam Æquationis collocatio, seu inventæ æqualitatis expressio.

I. Discussis rite conditionibus quæstionis propositæ, denominatisque terminis, videatur, quæ quantitates (vel simul, vel seorsim acceptæ) dicantur æquales, aut

aut saltem proportionales, nihil respiciendo notæne sint, an ignotæ, sed ignotas tanquam notas juxta conditiones quæstionis promiscuè in æquationem ordinabit; seu quod idem est; quæstionem ex idiomate latino, vel alio quocunque, in algebraicum per signa, & hypotheses exprimendum transferet, & eloquetur Analysta; erit hæc elocutio desiderata Æquatio prima ad solutionem ope Reductionis aptanda.

II. Tot Æquationes *formabit, ex conditionibus quæstionis, quot termini inveniuntur incogniti diversi, excepto casu quæstionum indeterminatarum, de quibus infra.*

SCHOLION.

218. *Quemadmodum primæ Æquationis inventio, & expressio acre, ac subtile ingenium Analystæ desiderat, quæ (utpote maximi laboris) lapis est Lydius, in quo sincerum periculum Analysta facere poterit suimet ingenii, ita habita prima Æquatione (quam tamen perspicax ingenium Analystæ ex conditionibus quæstionis propositæ haud difficile formabit) nihil facilius, quam* (ope Reductionis) *quæstionis solutionem reperire, repertamque exhibere.*

OPERATIO IV.

219. Æquationum primarum ad unum terminum incognitum, & solitarium Reductio.

Animadvertant Tyrones Analystæ, scopum, & finem unicum hujus operationis esse, ut servato semper utriusque partis Æquationis, valore æquali, Æquatio ita transformetur per operationes contrarias, ut ex una parte terminus ignotus separatus ab omnibus aliis tam notis, quam incognitis compareat, ex altera vero parte meri termini noti, nullis ignotis permixti habeantur; quod ut rectè tractent Analystæ per axiomata, & regulas paulo post referendas, sequentem regulam universalem cautè velim observent, & menti imprimant, videlicet.

Quæcunque operatio cum una Æquationis parte suscipitur, eadem, & in alia Æquationis parte peragatur, *excepta* Metathesi, *ut infra declarabitur. Itaque sequentia Axiomata, in quibus Reductionis regulæ fundantur, memoriæ cumprimis mandet Analysta.*

AXIOMATA QUANTITATUM, tam Æqualium, quam inæqualium.

220. I. Idem ſibimetipſi, & ſimile, & æquale eſt ut $a = a$, & $3 + 2 = 5$.

221. II. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt etiam æqualia inter ſe, ut ſi $a = x$, & $b = x$, erit quoque $a = b$, item ſi $3 + 2 = 5$, & $7 - 2 = 5$, erit etiam $3 + 2 = 7 - 2$. Et hinc

222. III. Æquale pro æquali, aut æqualia pro æqualibus ſubſtitui, & ſurrogari poſſunt, ut ſi $x = y$, & $y = a$, erit quoque $x = a$.

223. IV. Si Æqualibus addatur æquale, vel æqualia, manent æqualia, ut ſi $a = x$, & parti utrique addatur b, erit $a + b = x + b$, item ſi $a = x$, & $c = d$, erit etiam $a + c = x + d$.

224. V. Si ab æqualibus aufferantur, aut ſubtrahantur æqualia, vel æquale, manent æqualia, ut ſi $a = x$, & ab utraque parte aufferatur c, erit $a - c = x - c$, item ſi $a = x$, & $c = d$, erit quoque $a - c = x - d$.

225. VI. Si æqualia per æquale multiplicentur facta manent æqualia, ut ſi $a = x$, & utraque pars multiplicetur per b, erit $ab = xb$.

226. VII. Si æqualia dividantur per æquale, quoti erunt æquales, ut ſi $a = x$, & utraque pars dividatur per c, erit $\frac{a}{c} = \frac{x}{c}$

227. VIII. Si æqualia per alia æqualia multiplicentur, facta erunt æqualia, ut si $a = x$, & $c = d$, erit $ac = xd$, nam $ac = cx$, & $cx = xd$ per (§. 225.) ergo $ac = xd$ per (§. 222.). Eodem modo, si æqualia per æqualia dividantur quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$

228. IX. Quantitates æquales elevatæ ad eundem gradum potentiæ, manent æquales, ut si $a = x$, erit $a^2 = x^2$, aut $a^3 = x^3$.

229. X. Ex quantitatibus æqualibus elevatis ad eundem gradum potentiæ extractæ radices ejusdem gradus, manent æquales, ut si $aa = xx$, erit $\sqrt{aa} = \sqrt{xx}$, id est, $a = x$.

230. XI. Si inæqualibus addantur æqualia, aut ab inæqualibus subtrahantur æqualia, item si inæqualia multiplicentur, dividanturve per æqualia *Summæ*, *Residua*, *Facta*, & *Quoti* manebunt inæqualia.

THEOREMATA ÆQUATIONUM.

231. I. Si duarum quantitatum inæqualium differentia, seu residuum addatur ad earundem summam, erit aggregatum æquale duplo quantitatis majoris, ut si

$a > b$,	*In Numeris sit* $12 > 4$
Erit summa $= a + b$	*Erit summa* $12 + 4 = 16$
Differentia $= a - b$	*Differentia* $12 - 4 = 8$
Aggregatum $= 2a$	*Aggregatum* $12 + 12 = 24$

232. II. Si verò à summa duarum quantitatum inæqualium, subtrahatur differentia, erit residuum æquale duplo minoris, ut si $a > b$

In Numeris sit $12 > 4$

Erit summa $= a + b$	*Erit sum̃a* $= 12 + 4 = 16$
Differentia $= a - b$	*Different.* $= 12 - 4$
Subtrahendo $- \quad +$	*Subtrah.* $- \quad + = - 8$
Residuum $= 2b$	*Residuum* $= 4 + 4 = 8$

233. III. Si ad semisummam duarum quantitatum inæqualium addatur semidifferentia, erit aggregatum æquale quantitati majori, ut si $a > b$ erit

Addend. $\begin{cases} \textit{semisumma} = \dfrac{a+b}{2} \\ \textit{semidifferent.} = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$ *& hinc aggregatũ*

per (§. 136.) $\dfrac{a + b + a - b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$ *per* (§. 36.)

In Numeris sit $12 > 4$

erit semisumma $= \dfrac{12 + 4}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

semidifferentia $= \dfrac{12 - 4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ *sed* $8 + 4 = 12$

seu $\dfrac{12 + 4 + 12 - 4}{2} = \dfrac{24}{2} - 12$ *per* (§. 125.)

234. IV. Si à semisumma duarum quantitatum inæqualium subtrahatur earundem semidifferentia, erit residuum æquale quantitati minori, ut si $a > b$

erit

erit *semisumma* $= \frac{a+b}{2}$

semidifferentia $= \frac{a-b}{2}$

seu subtrahendo $= -\frac{a+b}{2}$ *sed* $\frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

Idem patet in numeris, si pro literis numeri substituantur, ut in priori Exemplo $12 > 4$.

Ultima quatuor axiomata magnum habent usum in formanda prima Æquatione, de qua (§.217.) *dictum.*

SCHOLION.

235. *Axiomatibus his rite intellectis, & memoria retentis, sequentes Reductionum regulas fundatas in axiomatibus, familiares sibi reddat Tyro Analysta, id universaliter notando: quod quemadmodum Medici calida frigidis, frigida calidis, id est contrariis tollere in more habent, ita Analystæ, ut terminum in æquatione incognitum, seu quæsitum reddant notum ope Reductionis, quidquid eidem, & ex illius parte in Æquatione adhæreat, per contrarias operationes in utraque parte Æquationis instituendas, tollunt. Sunt autem operationes contrariæ,* Additio & Subtractio *per* (§. 19.) *aut eorum loco* Metathesis, *item contrariæ sunt* Multiplicatio & Divisio *per* (§. 34.) *item inter contrarias sunt, elevatio radicis ad potestatem, & ex potestate radicis extractio; atque per ejusmodi contrarias operationes (quæ in regulis reductionum continentur) Æquationem tamdiu reducit Analysta, donec ex una Æquationis parte solus terminus ignotus, ex altera verò meri cogniti quomodocunque affecti habeantur.*

REGULÆ
REDUCTIONUM ANALYTICARUM
Æquationis solitariæ.

236. *Æquationem solitariam voco, in qua incognitus unus est, vel si plures, ii sint homogenei, ut si sit* $8x + a = ad - c$.

Reg. I.

Reg. I. Si ex parte termini ignoti compareant termini noti per *additionem* ſeu ſignum $+$ conjuncti, ii tollendi ſunt per *Subtractionem*, & quidem in utraque parte æquationis faciendam per (§. 224.) ut ſi ſit $4x+b=a$, ſubtrahendo ab utraque parte b erit $x+b-b=a-b$, hoc eſt $4x=a-b$ per (§. 20.)

Reg. II. Si ex parte termini ignoti inveniatur terminus notus per *Subtractionem*, ſeu ſignum $-$ connexus, is tollendus eſt per *Additionem* ejusdem termini in utraque parte æquationis inſtituendam, ut ſi ſit $3x-c=ab$, addendo utrique parte $+c$, erit $3x-c+c=ab+c$, hoc eſt $3x=ab+c$.

Reg. III. Loco reductionis per binas nunc traditas regulas inſtituendæ, ab exercitatis Analyſtis adhibetur figura *Metatheſis*, quæ eſt translatio terminorum quorumvis ex una Æquationis parte in alteram mutatis ſignis in contraria; eſt hic Modus per Metatheſim operandi admodum compendioſus, utpote vicem binarum antecedentium regularum ſæpius repetendarum unica terminorum translatione ſupplens. Sic ſi detur $4x+b=a$, erit per Metatheſim $4x=a-b$, item $3x-c=ab$, per Metatheſim $3x=ab+c$, aut $5x-c+b+d=ac$ per *Metatheſim* erit $5x=ac+c-b-d$.

Hac

Hac figura Metatheseos nos semper utemur, quotiescunque terminos per additionis, aut subtractionis signa affectos ex una parte Æquationis sublatos voluerimus.

Reg. IV. Si termino ignoto adhæreat aliquis terminus notus per hypothesim *multiplicationis* expressus, is tollendus est per *divisionem*, dividendo scilicet per terminum notum, adhærentem ignoto, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per hunc divisi non sunt, ut si sit, $ax = bc$ erit $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$ hoc est $x = \frac{bc}{a}$ per (§. 36.) item si sit $ax + bx = ad + c$, erit $\frac{ax + bx}{a + b} = \frac{ad + c}{a + b}$ hoc est $x = \frac{ad + c}{a + b}$ per (§. 103.)

Reg. V. Si termino ignoto adhæreat terminus notus per hypothesim *divisionis* expressus, is tollendus est per *multiplicationem*, multiplicando videlicet per terminum notum adhærentem, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per illum terminum divisi non sunt, ut si sit $\frac{x}{a} + b = c$ erit $\frac{ax}{a} + ab = ac$, hoc est $x + ab = ac$ per (§. 36.) & per Metathesim $x = ac - ab$.

Reg. VI. Quod si occurrat Æquatio, in qua *omnes termini* per eandem aliquam quantitatem multiplicati, vel divisi sunt, ea quantitas simpliciter deleri potest; ut si sit $ax + ac = ad$, erit $x + c = d$, item

item si sit $\frac{x+c}{a} = \frac{d+b}{a}$, erit $x+c = d+b$ per Axioma. (§. 226.)

Notent Tyrones: Analystis in more esse, in casu, quo per multiplicationem, aut divisionem notum ab ignoto tollunt, compendii gratia, delendo simplicetur per (§. 104.) terminum notum ignoto adhærentem, reliquos verò per illum multiplicatos, aut divisos indicare, ut si Æquatio sit $ax - bx = dc$ *statim eam ita exprimunt* $x = \frac{dc}{a-b}$, *item hanc* $\frac{x}{a} = c$, *ita* $x = ac$.

Reg. VII. Si terminus ignotus sit elevatus ad potentiam, ex illo, & cæteris terminis in utraque parte Æquationis repertis, extrahenda est radix ejusdem gradus, cujus est potentia. ut si sit $xx = ab$, erit $\sqrt{xx} = \sqrt{ab}$, hoc est, $x = \sqrt{ab}$, verum de hujusmodi reductione alibi fusius.

Reg. VIII. Si terminus ignotus sit affectus signo $\sqrt{}$, is, & cæteri utriusque partis in Æquatione termini elevandi sunt ad gradum ejus potentiæ, quem indicat exponens radicis, & tum signum $\sqrt{}$ termino ignoto præfixum ommittitur, ut si sit $\sqrt[2]{x} = ab$, erit $x = a^2b^2$. sed, & de his suo loco prolixius.

Reg. IX. Si in utraque parte Æquationis compareat idem terminus ignotus quomodocunque, affectus, tum, minor ignotus ad partem majoris (si major sit positivus) per Metathesim transferendus est, ut si sit

$5x = ab + 2x$, erit per Metathesim $5x - 2x = ab$, seu $3x = ab$. è contra, si major ignotus sit negativus, ad partem minoris per Metathesim transferatur, ut si sit $2x = ad - 4x$, erit $2x + 4x = ad$, seu $6x = ad$.

Reg. X. Tyrones Analystas sæpe multum juvat reductio Æquationis ad *nihilum*. Fit hæc reductio (ope Metathesis) transferendo omnes terminos tam notos, quam ignotos ad partem illam Æquationis, in qua habetur major terminus ignotus positivus, & aut contra, ad partem minoris, si major sit negativus, ut si sit

$$10x - c - b = a + 4x - cx,$$

erit $10x - c - b - a - 4x + cx = 0$, hoc est $6x - c - b - a + cx = 0$, dein iterum (perMetathesim) omnes notos transferendo, erit $6x + cx = a + b + c$, & dividendo per $6 + c$, erit $x = \frac{a + b + c}{6 + c}$ per Reg. IV.

Reg. XI. Si qui termini sint, qui se invicem destruere, vel per additionem, aut subtractionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt, ut si sit $x + x + b + x + c = a$, erit $3x + b + c = a$, & per Metathesim $3x = a - b - c$, & dividendo per 3, erit $x = \frac{a - b - c}{3}$ perReg. IV.

Item

Item si sit $5a + 3x = 5b - 3a + 2x$, erit reducendo ad nihilum (per Regul. X.)

$5a + 3x - 2x + 3a - 5b = 0$,

seu $x + 8a - 5b = 0$,

& per Metathesim $x = 5b - 8a$.

Reg. XII. Si occurrant termini (seu noti sint, seu ignoti) expressi per fractiones diversæ denominationis, reducendi sunt illico ad eandem denominationem, ut si sit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - c = x$, erunt reductæ per (§. 129.) $\frac{12x + 8x + 6x}{24} - c = x$ seu $\frac{26x}{24} - c = x$, & multiplicando per 24 erit $26x - 24c = 24x$, & per Metathesim $26x - 24x = 24c$, seu $2x = 24b$, & dividendo per 2, erit $x = \frac{24c}{2} = 12c$

Cætera suis locis, & oretenus plura.

OPERATIO V.

237. Æquationis ad unum incognitum, & ab omnibus notis liberum reductæ, in numeros *Resolutio*, vel figuræ *Constructio*.

1. Cum solutio quæstionis per ipsam Æquationem obtineatur, in qua terminus ignotus ex una Æquationis parte omnino solus, & liber ab omnibus aliis comparet, ex alia verò parte meri termini noti habeantur, nihil amplius laboris analystæ super est, quam (si quæstio per numeros solvi debet) ut literæ in valores suos numericos; pro quibus in Operatione II. substitutæ sunt, juxta expressionem Æquationis reductæ sol-

vantur, ut si foret Æquatio reducta, $x = \frac{a - b - c}{3}$ *& literæ substitutæ fuissent (per Operationem II) loco numerorum,* Ex. gr. *si fuisset* $a = 485$, $b = 10$, *&* $c = 25$, *erit Resolutio* $x = \frac{485 - 10 - 25}{3}$, *hoc est* $x = \frac{450}{3}$ *seu* $x = 150$.

Si vero Æquatio resolvenda sit in lineas, facienda est figuræ constructio, *ut in Geometria docebitur.*

II. *Invento valore termini ignoti, videat Analysta, an substituto loco termini ignoti valore invento, conditionibus propositæ quæstionis satisfiat, si ita, quod semper ritè operantibus evenit, non sine voluptate animi virtutem Analyseos admirabitur; secus (si quæstio non fuit impossibilis) errorem se admisisse, deprehendet.*

SCHOLION.

238. *His Regulis universalibus, & in abstracto declaratis, cum Tyro Analysta aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus primum quidem simplicioribus, dein magis reconditis, & subtilioribus ad Æquationem redigendis, reducendisque tentet, quibus ritè applicandis (in sequentibus capitibus) qua licet brevitate, exemplis prælucebo, ac præmissis adhuc quibusdam scitu necessariis, veluti manuducam, identidem commonendo, si cætera mathemata frequentem exercitationem desiderant, eam certo in quæstionum, & problematum resolutionibus cumprimis sedulam esse oportere, propterea, quod Ars Analytica non tam verbis, quam ipsamet praxi quotidiana, & formularum contemplatione seria, mentisque ad operationes acri adversione condiscatur, nec laboris unquam pœnitebit, cum novis inventis (veluti totidem ingenii partubus felix) eruditum orbem, non sine sincera animi voluptate, ad DEI Gloriam, locupletabit.*

CA-

CAPUT II.

Analysis Problematum simplicium, & determinatorum, uno incognito affectorum.

DEFINITIO II.

239. Omne Problema, aut Quæstio est vel *possibilis*, vel *impossibilis*; *Possibilis* dicitur, cujus conditiones inter se non pugnant, adeoque solutionem admittunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6; est enim numerus 3. *Impossibilis* est, cujus conditiones aut sibi opponuntur contradictoriè, aut unam impossibilem involvunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6, hac adjecta conditione, ut id dimidium sit numerus par; cum enim dimidium de numero 6, tantum sit numerus 3, qui par esse nequit, conditio adjecta quæstionem reddit impossibilem.

SCHOLION.

240. *Quæstionis impossibilitas, si ea ex conditionibus in quæstione appositis non illico reluceat, per Reductionis regulas manifesta redditur, si enim terminus incognitus in Æquatione reducta evadat negativus, hoc est, si sit æqualis meris cognitis negativis, aut, si sit æqualis radici imaginariæ, problema propositum Analysta pronunciabit esse practicè impossibile, ut si foret* $x = -4$, *aut* $x = \sqrt{-aa}$.

DEFINITIO III.

241. Problema possibile aliud est *determinatum*, aliud *indeterminatum*; *De-*

terminatum dicitur, in quo tot habentur conditiones, quot quantitates ignotæ, seu quando (discussis conditionibus) tot formari possunt Æquationes primariæ, quot sunt incogniti diversi. *Indeterminatum* appellatur, cujus pauciores reperiuntur conditiones, quam quantitates diversæ incognitæ. His accedit problema *plusquam determinatum*, quando plures conditiones apponuntur, quam sint incognitæ, quod ultimum plerumque evadit impossibile, si adjectæ conditiones superfluæ sint inter se pugnantes.

COROLLARIUM I.

242. Determinata problemata, determinatum etiam numerum solutionum admittunt; Indeterminata, quam plurimos solvendi modos habent, ut patebit inferius.

COROLLARIUM II.

243. Quando problema est determinatum, plures incognitæ ad unum reduci possunt, in Indeterminatis plures ignotas remanere est necesse, quarum una, aut altera (arbitrio Analystæ) determinanda est, per quam cæteræ determinentur, ut suo loco dicetur.

DEFINITIO IV.

244. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia sunt *simplicia*, *composita* alia. Simplicia sunt, cujus incognitus est *unius dimensionis*, id est, ad nullam potentiam elevatus, ut si sit $x = ab$.

Com-

Composita dicuntur, quorum incognitus est duarum, vel trium, aut plurium dimensionum, id est, ad potentiam secundam, tertiam, &c. elevatus, ut si sit $xx = ab$, aut $x^3 = ac$.

SCHOLION.

245. *Problemata tam simplicia, quam composita quandoque affecta sunt incognitis homogeneis tantum, quandoque vero pluribus ignotis heterogenei permiscentur, de quibus suo loco specialius; hoc capite problematibus simplicibus determinatis, & uno, vel pluribus incognitis homogeneis affectis, ad praxim Analyseos Tyrones manuducam. Sit igitur Resolvendum,*

PROBLEMA I.

Sempronius Parens condito testamento legavit ternis filiis suis *Mathiæ*, *Stephano*, & *Alexio* summam aureorum 485, his conditionibus partiendam, ut *Stephano* natu medio, tot aurei obvenirent, quot *Mathiæ* natu maximo, & præter hos, 10 aureos plures censeret *Stephanus*, quam *Mathias*. *Alexius* quoque totidem, quot *Mathias*, & insuper adhuc 25 aureos obtineret. Quæritur Legatum singulorum?

OPERATIO I.

Juxta regulas (215.) discutiendo statum quæstionis, & conditiones appositas intelligo. Primo: *Quæsitum hujus esse, ut singulorum filiorum legata summa reperiatur.* Secundo: *Clarum sit, si summam particularem* Mathiæ *legatam, notam haberem, jam quoque reliquorum legata in aperto essent, cum tam* Alexius, *quam* Stephanus *(demptis 10, & 25 aureis supererogatoriis) eundem cum* Mathia *aureorum numerum percipere debeant.* Tertio: *Video, præter 485 aureos, dari notos terminos 10, & 25 aureos.*

His rite intellectis procedatur ad denominationem:

OPERATIO II. DENOMINATIO.

Sit summa Legata $485 = a$, *aurei* $10 = b$, *aurei* $25 = c$, *erit juxta conditiones problematis.*

Legatum natu maximi, *seu* Mathiæ $= x$
- - - *natu medii*, *seu* Stephani $= x + b$
- - - *natu minimi*, *seu* Alexii $= x + c$

Facta rite hac denominatione progrediendum est ad elocutionem quæstionis Algebraicam, *seu ad formandam Æquationem*, *quam conditiones ipsiusmet quæstionis suppeditant. Intelligo enim singulorum filiorum legata particularia, in unam summam collecta, adæquare debere totam summam legatam*, *id est*, *legatum* x Mathiæ, *plus legato* $(x + b)$ Stephani, *plus legato* $(x + c)$ Alexii, *adæquat summam totalem* a. *Quam Æquationem in ventam eloquendo algebraicè*, *Sic exprimo*:

OPERATIO III. ÆQUATIONIS EXPRESSIO.

$$x + x + b + x + c = a$$

Hanc Æquationem jux a regulas Operat. IV. (§. 236.) *de Reductione datas*, *tractando*, *reducere tamdiu debeo*, *donec obtineatur Æquatio*, *seu formula*, *in qua ex una parte Æquationis terminus ignotus* x *omnino solus*, *ex altera vero parte meri cogniti habeantur. Itaque*,

OPERATIO IV. REDUCTIO.

Per Reg. XI. (§. 236.) *reducitur ad hanc*; $3x + b + c = a$

& per Metathesim juxta Reg. III, *erit* $3x = a - b - c$

dein per Reg. IV. dividendo utramque partem per 3 *erit* $\frac{3x}{3} = \frac{a - b - c}{3}$

hoc est per (§. 104.) - - $x = \frac{a - b - c}{3}$

Cum habeatur x *reductum*, *& solitarium ex una*, *ex altera vero parte meri cogniti*, *solutio quæstionis in aperto est*; *si termini noti Æquationis ultimæ juxta expressionem datam in numeros* (*pro quibus literæ substitutæ sunt*) *resolvantur. Erit itaque*

OPERATIO V. ÆQUATIONIS REDUCTÆ RESOLUTIO.

$$x = \frac{485 - 10 - 25}{3} \text{ hoc est } x = \frac{450}{3}, \text{ seu } x = 150.$$

Sunt

Sunt ergo Legata Particularia,

Legatū natu maximi, seu Mathiæ	$x = 150$	*hoc est*	$= 150$
- - *natu medii, seu* Steph.	$x + b = 150 + 10$		$= 160$
- - *natu min. seu* Alexii	$x + c = 150 + 25$		$= 175$
Summa omnium	$3x + b + c = 450 + 35$		$= 485$

Quæ summa cum adæquet totam à Sempronio *Parente legatam summam* 485 *aureorum, quæstionem rectè solutam esse demonstrant.*

SCHOLION.

246. *Præluxi Tyronibus exemplo facillimo fusè deducto, quo viam commonstrarem, qua deinceps intellectum circa artem Analyticam, in quæstionibus difficilioribus ratiocinando exercere valeant; reliqua enim exempla (supponendo ratiocinium Analyticum) via brevissima resolvemus; Id interea velim notent Tyrones, me iisdem fidelem suasorem esse, ut, tametsi hujusmodi quæstiones resolutionum numericarum, per Algebram numerosam (id est, non substituendo literas pro numeris) tractari possint, & à plerisque tractentur Analysis; Praxim eorum minime sequantur, verum semper literas pro numeris substituendas suadeo propterea, quod ultimæ resolutionum formulæ literis expressæ, utpote universales, medium, & instrumentum sint Theorematum, & regularum reperiundarum, ut patebit alibi; dein, id commodi præterea habent literæ, quod harum ope molestissimæ cæteroquin numerorum reductiones evitentur, viaque brevissima scopum obtineamus; accedit quod aptos reddant Tyrones Geometriam ope Algebræ tractandi, veramque scientiam, quæ ideis universalibus comparatur, adipiscendi.*

PROBLEMA II.

Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de singulorum ætate incidisset; Ego, inquit *Alexander, Ephestionem* meum antecedo annis 4; at *Clytus*, ego vero amborum vestrorum ætatem vivo;

Tum *Calisthenes*: jucunda eſt mihi, ô Rex! iſthæc ætatum commemoratio, Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos vixiſſet 72, trium veſtrum ætates compleverat.

Quæſtio hæc priori ſimillima, & eodem modo reſolvenda, proponit quærendas ſingulorum ætates. Fiat itaque diſcuſſis conditionibus apta denominatio.

Sint anni $4 = b$, *anni* $72 = a$
ſitque ætas Epheſtionis $= x$
erit ætas Alexandri $= x + b$
ætas Clyti $= 2x + b$

Itaque quæſtionem algebraice eloquendo, ex conditionibus appoſitis habebitur Æquatio;

$$x + x + b + 2x + b = a$$

hoc eſt per Reg. XI. $4x + 2b = a$
& per Metatheſim $4x = a - 2b$
& *per Reg. IV. divid. per 4. erit* $x = \frac{a - 2b}{4}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x = \frac{72 - 8}{4}$, *hoc eſt* $x = \frac{64}{4}$, *ſeu* $x = 16$

Eſt igitur ætas Epheſtionis	$x = 16$	*hoc eſt*	$= 16$
ætas Alexandri	$x + b = 16 + 4$		$= 20$
ætas Clyti	$2x + b = 32 + 4$		$= 36$
Summa ætatum	$4x + 2b = 64 + 8$		$= 72$

Recte igitur ſoluta quæſtio.

PROBLEMA III.

Pythagoras Philoſophus interogatus, quotnam haberet diſcipulos? Reſpondit: Dimidia pars meorum diſcipulorum Philoſophiæ operam navat, pars quarta Matheſim audit, ſeptima ſilentium tenet, adſunt præter hos 3 novitii ſacris noſtris mox initiandi.

Quæ-

Quæritur numerus omnium Discipulorum, quo reperto innotescit quoque numerus Philosophorum, Mathematicorum, & silentium tenentium. Itaque

Sint novitii $3 = a$, *summa omnium discipulorum* $= x$ *habebuntur ex conditionibus quæstionis.*

Philosophi $= \frac{x}{2}$, *Mathematici* $= \frac{x}{4}$, *Silentes* $= \frac{x}{7}$

Hos terminos juxta conditionem quæstionis in Æquationem ordinando.

Erit *Æquatio prima*: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + a = x$

Et reducendo fractiones ad eundem denominatorem.

Erit per Reg. XII. (§. 236.) $\frac{28x + 14x + 8x}{56} + a = x$

hoc est per Reg. XI. $\frac{50x}{56} + a = x$

Multipl. per 56 erit per Reg. V. $50x + 56a = 56x$

& per Metathesim $56a = 56x - 50x$

hoc est $56a = 6x$

& divid. per 6, erit per Reg. IV. $\frac{56a}{6} = x$

RESOLUTIO.

$$\frac{56a}{6} = \frac{56 \cdot 3}{6} = \frac{168}{6} = 28 \text{ hoc est } 28 = x$$

Fuêre itaque Discipuli Pythagoræ universim 28

Et hinc Philosophi $\frac{x}{2} = \frac{28}{2} = 14.$

Mathematici $\frac{x}{4} = \frac{28}{4} = 7.$

Silentes $\frac{x}{7} = \frac{28}{7} = 4.$

Novitii $= a = 3.$

Summa omnium $= 28.$

Eodem modo tractantur quæcunque quæstiones, in quibus fracti habentur; notent Tyrones, primam omnium operationum esse debere reductionem ad eundem denominatorem.

CA-

CAPUT III.

Resolutio Problematum in quibus plures occurrunt incogniti heterogenei.

Præter cætera hucusque dicta, noverint Tyrones artem totam hujusmodi Problemata solvendi (si determinata sint) in eo versari, ut incogniti, præter unum, eliminentur, & exterminentur omnes, in Indeterminatis vero tot, quot possunt eliminari.

Obtinetur autem hæc eliminatio duobus modis:

247. I. Eliminatio obtinetur per substitutionem Æqualis pro Æquali, juxta Axioma III. (§. 222.), ut si dentur Æquationes: Prima, $y+1=2x-2$, & altera $y-1=x+1$, velimus autem eliminatum y, reducantur ambæ Æquationes ad y solitarium juxta regulas reductionum

Erit prima per Metathes. $y=2x-3$
secunda per Metathes. $y=x+2$, *& hinc per Axioma III.* (222.) *substituendo loco* y *alterutram, erit* $x+2=2x-3$, *in qua eliminatus habetur terminus* y.

248. II. Eliminari potest per Additionem, aut Subtractionem totius Æquationis unius à tota Æquatione altera, sed prius per Reductionem ad destructionem unius termini ignoti rite præparata, ut sit Prima, $x+y=a$, secunda $8x+4y=b$, cupimus autem eliminatum y, quod cum in *secunda* multiplicatum per 4 compareat, *primam* per numerum 4 multiplicando aptare necesse erit.

ritE-

Eritque Prima $4x + 4y = 4a$,
quæ jam sic aptata si subtrahatur
nempe a secunda $8x + 4y = b$
Primam subtrahendo $4x + 4y = 4a$

$$\begin{array}{r} - \quad - \quad\quad - \\ \hline \end{array}$$

erit Residuum $4x = b - 4a$
in qua y eliminatum habetur.

SCHOLION.

Utra Methodus alteri præferenda sit, definire non licet, sed exercitato Analystæ jam hanc, jam alteram circumstantiæ quæstionis usurpandam suadebunt. Itaque

PROBLEMA I.

Euclidis Geometrarum Principis Ænigma, quod Geometris olim proposuisse fertur, sic habet: Ibant, inquit *Mulus*, & *Asina* vinum portantes, *Asina* ex dolore ponderis ingemiscebat, quo audito, *Mulus*: chara mater, inquit, quid ita lamentaris? mensuram mihi unam si dederis, duplo tunc plus, quam tu sustulero; sin tu à me unam acceperis, idem, quod ego, pondus feres. *Onus igitur utriusque peritissime Geometra edicas volo.* Itaque

Discussis rite conditionibus, ac probe intellectis verbis Muli, fiat denominatio, sitque numerus mensurarum vini, quas gestat Mulus $= y$

Numerus mensurarum Asinæ $= x$

jam ex conditione prima Muli; si Asina det Mulo unam mensuram, habebit Mulus $y + 1$, *& Asina habebit* $x - 1$, *cumque* $y + 1$ *dicatur esse duplum de* $x - 1$, *ut Æquatio habeatur, multiplicetur* $x - 1$ *per* 2, *erit* $2x - 2$ *duplum de* $x - 1$, *adeoque* $2x - 2$ *æquale* $y + 1$

hoc est $y + 1 = 2x - 2$

seu per Metathesi $y = 2x - 3$ A

Item

Item ex secunda conditione; si Mulus det Asinæ unam mensuram, habebit Mulus $y-1$, *& Asina* $x+1$, *sed tunc dicuntur habere uterque Æquales numero mensuras, ergo* $y-1=x+1$
per Metathesim $y=x+2$ B
sed etiã in Æquat. A *erat* $y=2x-3$ A
Ergo per Axioma III. (§.222.) $x+2=2x-3$,
in qua eliminatum est y
itaque per Metathesim $3+2=2x-x$ *hoc est* $5=x$

RESOLUTIO.

Inventus est valor $x=5$, *sed in Æquatione* B *est* $y=x+2$, *ergo* $y=5+2$. *Igitur* Mulus *habuit mensuras* $y=7$, Asina $x=5$.

Nam Primo: *si* Asina *portans* 5 *mensuras det unam* Mulo *portanti* 7, *habebit Mulus* $7+1$, *hoc est* 8, *& Asina habebit* $5-1$, *hoc est* 4, *sed* 8 *est duplum de* 4, *ergo prima conditio impleta habetur.*

Secundo: *Si Mulus habens* 7 *mensuras det Asinæ* 5 *portanti, unam, habebit Mulus* $7-1$, *hoc est* 6, *& Asina* $5+1$, *hoc est etiam* 6, *seu numero Æquales, quæ erat secunda conditio.*

PROBLEMA II.

Cauponæ Præfectus, vini partim generosi, partim debilioris urnas complures cellario suo intulit, lucrum justum facturus, si urnas singulas vini generosi pretio 42 grossorum, urnam vero debilioris 27 grossi. venumdaret; at enim vinum generosius, quia pretii majoris; debilius, quia gustui minus gratum, suis pretiis distrahere nequit, cupit itaque vina hæc commiscendo vas 100 urnarum implere, hac conditione, ut urnam vini mixti grossis 30 (pretio nempe inter 42 & 27 gross. medio) venumdando, idem lucrum reportaret, quod ob-

obtineret, si purum distrahere potuisset; *Idcirco, ne vel se, vel emptores falleret, scire desiderat, quot urnæ vini generosi, quotque debilioris accipiendæ sint, ut vini misti emergant urnæ* 100, *quarum singulæ* 30 *grossis distrahantur.*

Discussis rite conditionibus, fiat Denominatio.

Sit pretium urnæ vini generosi	42 *gross.*	$= a$
pretium debilioris	27 *gross.*	$= b$
Pretium medium vini misti	30 *gross.*	$= c$
Vas vini mixti urnarum	100	$= d$
Urnæ accipiendæ ex vino generoso		$= x$
- - *ex vino debiliore*		$= y$

Ergo ratione numeri urnarum juxta conditionem Problematis primam.

Erit Æquatio prima hæc $x + y = d$

& per Metathesim $x = d - y$ A

Jam vero ratione pretii per conditionem secundam.

Erit Æquatio secunda $ax + by = dc$

& per Metathesim $ax = dc - by$

& dividendo per a erit $x = \frac{dc - by}{a}$ B

Sed etiam in Æquat. Primæ A *est* $x = d - y$

Ergo in Æquat. B *substituendo loco x valorem æqualem* $d - y$

Erit per Axioma III. (§. 222.) $d - y = \frac{dc - by}{a}$

& multiplicando per a, erit $ad - ay = dc - by$

per Metathesim $ad - dc = ay - by$

denique dividendo per $a - b$, *erit* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$

RE-

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$y = \frac{(42 . 100) - (100 . 30)}{42 - 27}$; *hoc est* $y = \frac{4200 - 3000}{15} = 80$

Itaque $y = 80$ *urnæ*, (*Nã in Æquat.* A *est* $x = d - y$
& $x = 20$ (*seu* $x = 100 - 80 = 20$.

Summa $x + y = 100$ *urnæ*

Jam 100 *urnæ vini mixti* (*urnam per* 30 *groß. vendendo*) *faciunt* 3000 *grossos*.

Sed etiam 80 *urnæ per* 27, *faciunt* 2160 *groß.*
& 20 *urnæ per* 42, *faciunt* 840 *groß.*

seu simul addend. 3000 *groß.*

Ergo habetur adimpleta secunda conditio.

SCHOLION I.

253. *Hujusmodi Problema*, *vocatur* Mixtionis, *vel* Alligationis, *habetque usum*, & *utilitatem amplissimam in Oeconomicis*, *Physicis*, *Pharmaceuticis*, *Chymicis* &c. & *universim in casu omni*, *quo duo miscibilia diversi valoris*, *aut ponderis commiscenda sunt*; *ita*, *ut emergat mixtum desiderati valoris*, *pretii*, *virtutis*, *probitatis*, *aut ponderis medii*; *ut* Ex. gr. *Si misceri debeat frumentum*, *vina*, *medicinæ*, *merces*, *diversa liquida chymica*, *item metalla* &c. *ad obtinendum mixtum valoris medii*. *Hinc Tyro Analysta ultimam Æquationem* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$ *memoria retinens*, *omnem hujusmodi quæstionem* (duorum nempe miscibilium) *facile solvet*, *si in proposita quavis quæstione*, *eandem nostram denominationem retineat*, *id est*, *si rem datam majoris pretii vocet* a, *viliorem* $= b$, *mediam* $= c$, *quantitatem datam mixti componendi* $= d$, *quanditatem denique ex viliore accipiendam* $= y$, *quibus denominatis*, *hanc formulam* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$, *in numeros propositæ quæstionis resolvendo*, *solutionem cujusvis quæstionis illico reperiet*, *ut tentanti patebit*.

SCHO-

SCHOLION II.

251. *Hæc formula* $\frac{ad-dc}{a-b}=y$ *est celebris illa Regula Arithmeticorum, quam* Mixtionis, *sive* Alligationis *nomine compellantes, licet fuse declarare conentur, nunquam satis ad captum demonstrant. Cæterum notent Tyrones, hoc, & pleraque problemata, quæ vulgo per duos incognitos diversos (causa exercitii) resolvuntur, unico incognito ab exercitatis Analystis plerumque solvi. Sic in priori Problemate, si numerus urnarum vini debilioris vocetur* y, *loco* x (*numeri nempe urnarum generosioris*) *poni potest* d−y, *quod ipsum Æquatio prima* A, *attentum Analystam edocet. Reliqua mixtionum problemata, ad quæ plura, quam duo miscibilia ingrediuntur, ad problemata indeterminata pertinent, de quibus jam breviter.*

CAPUT IV.

Resolutio Problematum Indeterminatorum.

252. *Cognoscitur Problema aliquod propositum, esse ex genere indeterminatorum per* (§. 241.)

In his Problematibus, ultima Æquatio duos plerumque, aut etiam plures complectitur incognitos, etsi ab exercitato Analysta, quotcunque dentur incogniti, semper ad duos saltem incognitos per substitutionem (æqualis pro æquali) juxta Axioma III. (§. 222.) *reduci possint.*

PROBLEMA I.

Sint distribuendi 240 fl. in Studiosos pauperes 50, hac conditione, ut singuli Theologi percipiant fl. 8, Philosophi singuli fl. 6, singuli Humanistæ fl. 2.

Quæritur quotnam esse debeant Theologi, quot Philosophi, & Humanistæ?

Problema hoc indeterminatum, claritatis gratia solvemus per Algebram numerosam.

Fiat itaque denominatio.

Sint Theologi $= x$, *Philosophi* $= y$, *Humanistæ* $= z$.

Erit per conditionem primã, Æquatio Prima A hæc:

$$x + y + z = 50$$

& per Metathesim $\quad x = 50 - y - z \quad$ A.

Deinde per conditionem secund. Æquatio Secunda B *erit* $8x + 6y + 2z = 240$

Per Metathesim $\quad 8x = 240 - 6y - 2z \quad$ B

& multipl. Æquat. A *per* 8, *erit* $8x = 400 - 8y - 8z \quad$ A

ergo per Axi. III. (222.) $240 - 6y - 2z = 400 - 8y - 8z$

& per Metathesim $\quad 8z - 2z = 400 - 240 + 6y - 8y$

hoc est $\quad 6z = 160 - 2y$

dividendo per 6 *erit* $\quad z = \frac{160 - 2y}{6}$

Cum sit Indeterminatum, assumatur arbitrarie pro litera y *numerus* 32, *hoc est, sint Philosophi* $y = 32$, *erunt (vi ult. formulæ) Humanistæ* $z = \frac{160 - 64}{6} = 16$, *& consequenter Theologi* $x = 2$; *nam* $32 + 16 + 2 = 50$, *quæ est conditio prima.*

Et præterea per conditionem secundam,

$2 . 8 + 32 . 6 + 16 . 2 = 240$ *fl. ergo.*

SCHOLION I.

Dixi (§. 242.) *omne indeterminatum Problema plures solutiones admittere, hinc in nostro Problemate, substituendo pro* y *diversos numeros (quos sequens Tabula exhibet) solutio invenietur, quæ iisdem conditionibus satisfacit.*

TABULA

Decem variarum solutionum Problematis antecedentis.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
$x=$	2	4	6	8	10	14	16	18	20	22
$y=$	32	29	26	23	20	14	11	8	5	2
$z=$	16	17	18	19	20	22	23	24	25	26
	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Ex

Ex singulis classibus hujus Tabulæ patet, quod omne indeterminatum Problema reduci possit ad determinata Problemata complura; Sic si in nostro Problemate præter conditiones jam positas, adjiciatur Ex. gr. *etiam hæc, ut Philosophi sint duplo plures, quam Theologi, & itidem Humanistæ tot, quot Philosophi, patet ex contemplatione hujus Tab. nullam classem satisfacere his conditionibus, præter classem V. Unde colligitur, Docentibus Analysim magno subsidio esse Resolutionem Probl. indeterminatorum, cum ope horum, unica solutione campus formandi varia Problemata determinata aperiatur, quæ exercendis Tyronibus suis deserviant, Tyronibus vero via ostenditur facillima sibimetipsis fabricandi Problemata determinata, quibus se se exerceant in Analysi. Sed hæc de indeterminatis sufficiant.*

SCHOLION II.

253. *Huc revocantur omnia Problemata miscibilium, quando plura dantur miscibilia, quam duo.*

CAPUT V.

De Resolutione Æquationum Quadraticarum.

DEFINITIO V.

254. Æquatio Quadratica, seu duarum dimensionum, aut secundi ordinis, dicitur, si incognitus terminus sit Quadratus, ut si sit, $xx = ab$, vel $xx + ax = ac$.

SCHOLION.

255. *Si exponens incogniti est 3, dicitur Æquatio* Cubica, *aut trinæ dimensionis; si exponens incogniti est* 4, *quarti ordinis &c. Prætermissis Æquationibus altiorum ordinum, quarum Resolutionem Analysis sublimior pluribus pertractat, nos præfixi temporis angustis limitibus conclusi, Regulas solvendi Æquationes duntaxat* Quadraticas *strictim exponemus. Analystæ itaque Æquationes* □ *in binas distinguendo classes, quasdam dicunt* Completas, Incompletas *alias, aut* Deficientes. Comple-

pletæ dicuntur, in quibus nullus deficit terminus ad expressionem Quadraticam requisitus, ut si sit xx = ab, *aut* xx + 2ax + aa = bc. Incompletæ *vocantur, si terminus tertius, (id est, quadratum partis unius radicalis) deficiat, ut si sit* xx + 2ax = ab, *in qua deficit terminus* aa, *ut constat ex* (§. 182.) *De utraque classe nunc brevibus.*

REGULÆ

Discernendi an data quævis Æquatio quadratica sit completa, an incompleta.

256. Reg. I. Si in Æquatione incognitus quadratus solus habeatur (seu is affectus sit cognito, seu non sit) neque præterea idem incognitus simplex in Æquatione reperiatur, hujusmodi Æquatio completa est; ut si sit $xx + ac = bd$, quia quadratum hujusmodi est monomium.

Reg. II. Si in data Æquatione præter quadratum incogniti termini, inveniatur idem incognitus simplex, affectus cognito, & præterea quadratum illius dimidii cogniti, quo incognitus simplex affectus est, Æquatio quoque *completa* erit; ut si sit $xx + 2ax + aa = bd$, in qua habetur quadratum aa factum, de $\frac{2a}{2}$ seu de a, quo affectus est secundus terminus $2ax$. Ratio hujus est, quia tale quadratum est factum ex $\surd$ binomia, $x + a$, vel $x - a$, ut constat ex (§. 182.)

Reg. III. Si verò in Æquatione deficiat hoc quadratum, de dimidio factore secundi

cundi termini, ſeu ſi deficiat tertius terminus quadrati binomii, Æquatio incompleta, erit, & deficiens, ut ſi ſit $xx + 2ax = db$, aut $xx + ax = cd$, item $xx - 6x = ac$, vel $xx + x = ab$, aut $xx + \frac{x}{3} = bc$, vel denique $xx + \frac{x}{c} = bb$. In Prima enim deficit $\square aa$, in Secunda deeſt $\square$ ex $\frac{a}{2}$ hoc eſt $\frac{aa}{4}$, in Tertia non habetur $\square$ ex $\frac{6}{2}$ ſeu de 3, quod eſt 9, in Quarta deficit $\square$ ex $\frac{1}{2}$, hoc eſt $\square \frac{1}{4}$, in Quinta deeſt $\square$ de dimidia $\frac{1}{3}$ ſeu de $\frac{1}{6}$, quod eſt $\square \frac{1}{36}$ in Sexta deficit $\square$ de dimidio $\frac{1}{c}$, ſeu de $\frac{1}{2c}$, id eſt $\square \frac{1}{4cc}$.

SCHOLION I.

257. *Ut verò Tyro Analyſta indicium certum habeat, an deficiat terminus tertius; Reducat ſibi datam Æquationem (prius tamen per Re ulas Reductionis ad expreſſionem ſimpliciorem transformatam) ad Æquationem* Nihili *per Reg. X. (§. 236.) id eſt, omnes terminos tam cognitos, quam incognitos per Metatheſim, ita ad unam partem Æquationis transferat, ut incognitus quadratus evadat poſitivus, quo facto contemplando terminos, videat, an ex dimidio factore cogniti, quo incognitus ſimplex afficitur, adſit* $\square$, *vel abſit? ut ſi foret* $2ax = bc - xx - aa$, *erit reducta ad nihilum* $xx + 2ax + aa - bc = 0$, *quæ completa comparet; item ſi ſit* $xx = aa + cx$, *erit ad nihilum reducta* $xx - cx - aa = 0$, *in qua deficit* $\square$ *ex* $\frac{-c}{2}$ *ſeu* $\frac{cc}{4}$ *& ita de aliis.*

SCHOLION II.

258. *Notent Tyrones, quod si reducta ad* Nihilum *Æquatio sit hujusmodi;* $xx - 2ax - aa + bd = 0$, *hæc Æquatio non sit completa, cum* $\square - aa$, *utpote Imaginarium, produci non possit ex* $\frac{-2a}{2}$ *seu ex* $-a$, *ut constat ex* (§. 175.) *adeoque universaliter, si tertium membrum adsit, sed affectum signo* $-$, *id non pertinere cognoscitur ad expressionem quadraticam; adeoque illam deficientem esse; Nam si pertineret, tum quidem effici poterit positivum per translationem Metatheseos, sed tum iterum incognitus quadratus evadet imaginarius, quotiescunque autem incognitus evadit imaginarius, aut ejus Radix negativa, indicat, aut quæstionem, ex qua emersit hujusmodi Æquatio, esse impossibilem, aut ab Analysta non recte conceptam, & denominatam, aut etiam errorem in Reductione admissum, intelligendo, si quæstio in numeros resolvenda sit.*

REGULÆ

Reducendi Æquationem Quadraticam incompletam, item affectam signo $\surd$.

259. Reg. I. Reducta Æquatione ad nihilum, transferantur iterum termini per Metathesim ad alteram partem Æquationis, remanentibus duobus terminis affectis incognito; ut si sit $xx + ax - b = 0$, erit $xx + ax = b$, quo facto, addatur utrique parti $\square$ de dimidio factore termini ax, qui est $\frac{a}{2}$, seu $\square \frac{aa}{4}$, erit Æquatio completa $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$, deinde extrahatur $\sqrt[2]{}$ ex parte utraque, erit $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}})$ & per Metathesim transferendo $+ \frac{a}{2}$, erit

$x =$

$x = (\sqrt{b} + \frac{aa}{4}) - \frac{a}{2}$, quæ eſt Æquatio Reſolutoria. Idem eſt de aliis in Reg. III. (§.256.) adductis.

SCHOLION I.

260. *Meminiſſe velim Tyrones, dum ex* □ *incognito jam per ſupra datas Regulas completo,* $\sqrt[2]{}$ *extrahitur, toties partem radicis cognitæ eſſe negativam, quoties ſecundus terminus negativus eſt, ut ſi extrahatur* $\sqrt[2]{}$ *ex hac Æquatione jam completa* $xx - ax + \frac{aa}{4} = bd + \frac{aa}{4}$, *erit* $x - \frac{a}{2} = (\sqrt{bd} + \frac{aa}{4})$ *& non* $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{bd} + \frac{aa}{4})$

SCHOLION II.

261. *Si ſit Æquatio completa, Reductio immediate per extractionem radicis obtinetur, ut ſi ſit* $xx = ab$, *erit Reducta* $x = \sqrt{ab}$, *item ſit* $xx - 2ax + aa = bc$, *erit extracta radice* $x - a = \sqrt{bc}$, *& per Metathesim* $x = (\sqrt{bc}) + a$. *Notent Tyrones, quantitates notas ex altera parte Æquationis comparentes, quibus ſignum* $\sqrt{}$ *præfigitur, includendas eſſe parentheſi prius, antequam translatio termini cogniti ex parte termini incogniti fiat ad alteram partem, ne terminus cognitus hoc modo, poſt extractionem radicis translatus, afficiatur ſigno* $\sqrt{}$.

262. Reg. II. Quemadmodum ad reſolvenda Problemata □, utimur extractione $\sqrt[2]{}$, ita ſi occurrat Æquatio, cujus incognitus affectus eſt $\sqrt[2]{}$ tota Æquatio elevari debet, ad potentiam ſecundam, ſeu ad □. ut ſi foret $\sqrt{x} = a + b$, elevando utramque partem ad □. erit $x = aa + 2ab + bb$. Item ſi ſit $\sqrt{ax} = b$, erit $ax = bb$, & dividendo per a, erit $x = \frac{bb}{a}$.

Sed

Sed enim hasce praxes jugis Resolutionum exercitatio faciliores reddet. Itaque

PROBLEMA I.

Manlius miles cum sociis quibusdam è pugna redux, interrogatus à *Marco Pisone*, quotnam hostium sua stravisset manu? mea inquit, meorumque sociorum manu fortissima, cæsa hostium capita jacent 1296, id vero memoria dignissimum, quod singuli nostrum tot straverimus hostes, quot nunc socii sumus. *Quæritur quot fuerint una cum Manlio milites? & quotnam hostes singuli straverint?*

Discussis ritè conditionibus fiat denominatio.

Sit summa cæsorum hostium 1296 $= a$

Socii milites una cum Manlio $= x$

Igitur cum singuli tot straverint hostes, quot fuerint socii, erit quoque numerus hostium à singulis seorsim cæsorum $= x$

Ergo simul omnes straverunt ex hostibus summam xx *itaque Æquatio* $xx = a$

& extrahendo $\sqrt[2]{}$ *erit* $x = \sqrt{a} = \sqrt{1296} = 36$ *fuerunt ergo cum Manlio socii* 36, *& singuli straverunt ex hostibus etiam* 36.

PROBLEMA II.

Isidorus Colonus Mediensis à designatis fundorum conscribendorum Quæstoribus interrogatus, quotnam tritici metretas annis singulis suo in agro seminaret? respondit:

dit: Ego ſex metretas plures ad conſerendum agellum meum in ſementem annis ſingulis ſpargo, quam *Andreas* germanus meus Colonus Marburgenſis, quæ meæ metretæ, ſi ita DEO largiente multiplicarentur, ut ſingulæ tot producerent metretas, quot *Andreas* ſingulis annis inſementem ſpargit, inferrem annis ſingulis horreo meo metretas tritici 720.

Quæritur quot Andreas, quotque Iſidorus metretas annis ſingulis in ſementem ſpargant.

Diſcuſſis rite conditionibus, fiat denominatio:

Sint itaque metretæ $6 = a$, *metretæ* $720 = b$

ſint metretæ quas ſeminat Andreas $= x$

ergo Iſidorus *ſeminat annis ſingul.* $= x + a$

Jam per conditionem Problematis

erit $(x + a) \cdot x = b$

hoc eſt $xx + ax = b.$

Igitur complendo quadratum per Reg. I. (§. 259.) *hoc eſt*

Add. utrique parti $\square \frac{aa}{4}$, *erit* $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$

Et extrahendo $\sqrt[2]{}$ *erit* $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}})$

& per Metatheſim $x = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}}) - \frac{a}{2}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x = (\sqrt{720 + \frac{36}{4}}) - \frac{6}{2}$,

hoc eſt $x = (\sqrt{729}) - 3 = 27 - 3 = 24$

Itaque

metretæ, quas seminat Andreas $x = 24$ *hoc est* 24
quas seminat Isidorus $x + a = 24 + 6 = 30$

Jam si multiplicentur 30 *per* 24 *habebitur productum* 720 *Metret.*

Recte igitur soluta quæstio.

SCHOLION.

263. *Hæc erant, quæ de Resolutionibus Problematum, tanquam prima Rudimenta summatim duntaxat adduçere poteram; supersunt multa, eaque singularia, quæ ad sublimiorem Analysim viam sternerent, quibus præscripta brevitate compulsus supersedere cogor. ne tamen utilitati meorum Tyronum deforem, quorum nunquam non studiosus exstiti, idçirco binis quinquagenis selectissimorum Problematum Analyticorum in numeros solvendorum, singularibus paginis, sub nomine:* Exercitationum Analyticarum *typo edendis, si DEO O. M. visum fuerit, Tyronum sciendi cupiditatem accendam, & Quæstionibus partim* applicatis, *iisque tum in Physicis, tum Oeconomicis per quam utilissimis, partim* Abstractis *Arithmeticæ, & Geometriæ inservientibus, non injucundum campum aperiam, se se privatis in ædibus exercendi, certo enim consilio, Problemata quædam afferam, quæ* primas Æquationes *(denominatione facta) contineant, atque una ultimam duntaxat reductam exhibeant, ut nempe Reductionem marte proprio tractantes, praxim Regularum (§. 236.) imbibant. Quædam verò sola Quæstione proposita finientur, ut in reperiundis primis quoque Æquationibus dexteritatem, ingeniumque summet Tyro periclitari valeat. Ordo jam postulat, ut parte ultima, utilissimam, summeque necessariam proportionum doctrinam complectente, opusculum concludamus; de qua jam brevissime.*

FINIS PARTIS III.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, Usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

Nihil per universam Mathesim, & eidem sororio nexu junctissimam Philosophiam naturalem, cæterasque liberalium artium scientias magis necessarium, nihil in omni vitæ humanæ commercio magis esse utile, atque *Proportionum scientiam*, nemo, (nisi ignarus) inficiabitur. Cum enim DEUS O. M. quidquid omnipotente suo decreto ex abysso nihili produxit, omnia in *Pondere*, *Numero*, & *Mensura* creaverit, nihil in creatis rectè cogitaveris, nihil rectè egeris, si in sacras proportionum leges pecces; cogita *Pulchrum*, cogita *Solidum*, *Stabile*, *Jucundum*, *Utile*, *Mirum*, *commodum &c.* & curiosus quære rationem, cur hæc ita potius sint, quam secus; profecto, duce natura, fatebere dicendo: *Quæ recta sunt, habere proportionem ad invicem, quæ secus, hac carere.* Verum ais, at quid dicas, nescis, si doctrinam ignoras proportionis; Hæc nempe est (ut metaphora utar) medulla illa, atque anima mathematica stupendarum effectrix rerum. Hæc illa methodus ratiocinandi, argumentandique ratio plane subtilissima, solidissima, certissima, brevissimaque è proportione Geometrica petita, qua, tanquam *Logica*, cæteræ fere omnes, circa res naturales versantes disciplinæ perficiuntur, atque consistunt, quam si sustuleris, scientias, artesque exstinxisti, pulchrumque vitæ humanæ commercium in monstrum chaoticum horrendum, atque terribile deformâsti; de hac itaque summe necessaria doctrina hac quidem parte in compendio.

CA-

CAPUT I.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica.

DEFINITIO I.

264. *Ratio*, dicitur duarum quantitatum homogenearum comparatio, vel relatio, aut respectus ad invicem. Hujusmodi comparatio, sive *Ratio* duplex est, *Ratio* nempe *Arithmetica*, & *Ratio Geometrica*.

DEFINITIO II.

265. *Ratio Arithmetica*, dicitur comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad *excessum*, vel *defectum*; ut si comparentur inter se numeri; 4 & 12, quot nempe unitatibus minor sit numerus 4, quam 12, aut numerus 12 major, quam 4. *Excessus* hic, vel *defectus*, vocatur *Differentia*; sic excessus numeri 12 supra 4, qui est 8, vocatur *Differentia*; innotescit hæc differentia per subtractionem.

HYPOTHESIS I.

266. Ratio Arithmetica *designatur, vel exprimitur ita:* $a \overset{d}{,} b$, *vel* $4 \overset{8}{,} 12$, *id est inter quantitates comparatas ponendo* (,) *&* differentiam *locando supra comma, vel etiam* $a \overset{d}{—} b$.

DEFINITIO III.

267. *Ratio Geometrica*, est comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad

quoad quotitatem; ut si consideremus duos numeros, *Ex.gr.* 12 & 4, quoties nempe 12 contineat numerum 4; vel quoties numerus 4 contineatur in 12, quæ quotitas per divisionem innotescit; Quotus vero, qui indicat quoties una quantitas alteram continet, vel in ea continetur, appellatur *Exponens*, vel *Nomen Rationis*, ut in dato Exemplo foret numerus 3.

HYPOTHESIS II.

268. *Ratio Geometrica rectè exprimitur per Hypothesim* Divisionis (§.30.) *traditam, ut* $a\overset{m}{:}b$, *aut* $12\overset{3}{:}4$, *in qua* exponens *Rationis, seu quotus* m *locatur super duo puncta.*

SCHOLION.

269. *Rationem Geometricam recte exprimi per hanc Hypothesim, patet ex definitione Rationis Geometricæ (§.267.) unde liquet eam etiam rectè sic exprimi* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{12}{4}$. *Sed modo priore usitatius.*

DEFINITIO IV.

270. Quantitates, quæ comparantur, (tam in Ratione Arithm. quam Geometr.) vocantur *Termini*; & quidem terminus primus, qui comparatur, seu sinistram tenens, vocatur *Antecedens*; secundus, vocatur *Consequens*: sic in hac Ratione *a*:*b*, *Antecedens* est *a*, *Consequens* verò *b*.

DE-

DEFINITIO V.

271. *Ratio* Geometrica *Majoritatis*, vel *Multipla*, dicitur, quando Antecedens est major suo consequente, ut si sit $12 \overset{3}{:} 4$ & in specie: *Dupla*, si exponens est 2, *Tripla*, si exponens 3 &c. *Ratio* verò *Minoritatis*, vel *Submultipla* appellatur, dum Antecedens est minor suo consequente, ut si sit 4 : 12, in hac exponens semper est fractus. *Ratio* denique *Æqualitatis* est, quando Antecedens est æqualis suo consequenti, ut 4:4, *hæc postrema peculiarem considerationem non habet in doctrina proportionum.*

COROLLARIUM.

272. Quoniam Ratio Geometrica est comparatio quoad quotitatem, (§. 267.) sequitur in omni Ratione Geometrica Antecedens esse *dividendum*, consequens *divisorem*, & exponentem Rationis, *Quotum*; unde consequitur (cum expressio fractionum sit expressio divisionis, & hæc sit expressio Rationis Geometricæ) quod omnis fractio vera sit Ratio Geometrica *Minoritatis*, in qua *Numerator* est Antecedens, & *Denominator* consequens, Nam $\frac{4}{12}$. idem est ac 4 : 12. Præterea quod omnis fractio spuria sit Ratio Geometrica *Majoritatis*, aut saltem *Æqualitatis*, ut si sit $\frac{12}{4}$, quod idem est ac 12 : 4.

SCHOLION.

273. *Pro diversitate* Exponentium *Rationes Geometricæ varias sortiuntur denominationes, & quidem in*

Ra-

Ratione Majoritatis, *I. si exponens est* $1\frac{1}{2}$ *dicitur*: Sesqui altera, *ut* 3 : 2. *Si exponens est* $1\frac{1}{3}$, *dicitur* sesquitertia, *ut* 4 : 3 *&c. quæ denominationes naturam denominatorum sequuntur, cum addito* sesqui. *Ut* sesqui quarta, *si* $1\frac{1}{4}$, sesqui quinta *si* $1\frac{1}{5}$ *&c.* II. *Si exponens sit unitas, cum fractione habente* numeratorem maiorem unitate; *dicitur* superpartiens; *ut si sit exponens* $1\frac{2}{3}$, *erit* superbipartiens tertias, *ut in hac* 5 : 3. *Si exponens sit* $1\frac{3}{4}$ supertripartiens quartas *&c. Eædem denominationes manent in Ratione* Minoritatis *respectu exponentium, præfigendo particulam* Sub, *ut* 4 : 8, *cujus exponens est* $\frac{4}{8}$, *seu* $\frac{1}{2}$ *dicitur* Subsesqui altera. *Sed hæc, ut ad doctrinam proportionum nihil faciunt, ita solius notitiæ causa adnotâsse sufficiat.*

DEFINITIO VI.

274. Rationes Geometricæ *Æquales* dicuntur, si eosdem habeant exponentes, & vicissim. Sic $\overset{m}{a:b}$, & $\overset{m}{c:d}$, item $\overset{4}{8:2}$, & $\overset{4}{12:3}$ Æquales sunt; è contra *Major* dicitur *Ratio*, quæ exponentem habet majorem, ut $\overset{3}{6:2} > \overset{2}{8:4}$, *Minor* verò cujus exponens minor est; ut $\overset{2}{8:4} < \overset{3}{6:2}$.

SCHOLION.

275. *Eodem modo Rationes Arithmeticæ Æquales, vel Majores, aut Minores dicuntur relate ad differentiam rationum, sic* $\overset{4}{3,7} = \overset{4}{2,6}$, *item* $\overset{5}{3,8} > \overset{3}{4,7}$ *&* $\overset{3}{4,7} < \overset{5}{3,8}$.

THE-

THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

276. PROP. *In omni Ratione Geometrica Productum ex termino* consequente *in* exponentem, *æquale est termino* antecedenti, *ut si sit* $\overset{m}{a:b}$, *dico;* $mb = a$.

DEMONSTRATIO.

In omni Ratione Geometrica Antecedens est *dividendus*, consequens *divisor*, & exponens est *Quotus*, per (§. 272.) sed factum ex *divisore* in *Quotum* æquatur *dividendo* per (§.61. Arith.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

277. Hinc per Axioma III. (§.222.) loco *Antecedentis*, semper substitui potest *Consequens* multiplicatus per *Exponentem*. Sic loco $\overset{m}{a:b}$, scribi potest $mb:b$. Nam $\frac{mb}{b}$ dat quotum m, quod ipsum numeri pro literis substituti declarant, sic $6:3$, idem est ac $3.2:3$, nam $3.2 = 6$.

THEOREMA II. FUNDAMENTALE.

278. PROP. *In Ratione Arithmetica Summa ex termino* Minore, *&* Differentia *est æqualis termino* Majori, ut si sit $\overset{d}{a,b}$ *vel* $\overset{3}{4,7}$, *erit* $b + d = a$, *aut* $4 + 3 = 7$.

Demonstratio petitur ex (§ 43. Arith.)

THEOREMA III.

179. PROP. *Duæ Quantitates, habentes eandem Rationem ad unam tertiam, æquales sunt, & vicissim.* DE-

DEMONSTRATIO.

Sint quantitates a, & d, quæ ad eandem b dicant eandem Rationem, erunt itaque $a \overset{m}{:} b$, & $d \overset{m}{:} b$, dico esse, $a = d$. Nam $a = mb$, & $d = mb$ per (§. 276.) ergo per (§. 222.) $a = d$. Q.E.D.

CAPUT II.

De Proportione Geometrica.

DEFINITIO VII.

280. *Proportio* est duarum Rationum *Æqualitas*; & in specie, *Proportio Geometrica* est duarum Rationum *eosdem* exponentes habentium *Æqualitas*, ut si sit $a \overset{m}{:} b$, & $c \overset{m}{:} d$, item $8 \overset{2}{:} 4$, & $6 \overset{2}{:} 3$. *Proportio Arithmetica* est duarum Rationum eandem *differentiam* habentium *Æqualitas*, ut si sit $a \overset{d}{,} b$, & $c \overset{d}{,} f$, aut $5 \overset{2}{,} 3$, & $7 \overset{2}{,} 9$.

COROLLARIUM.

Omnis itaque Proportio quatuor terminis constat. *Et hinc rectè exprimitur per sequentem hypothesim.*

HYPOTHESIS III.

281. Proportio Geometrica *sic exprimitur*, a:b = c:d, *vel* 8:4::6:3, *&c*, *enunciatur*; a *est ad* b, *sicut* c *est ad* d, aut *sicut* a *se habet ad* b, *ita* c *se habet ad* d; Arithmetica *sic exprimitur*; a, b = c, f, aut 3, 5 = 7, 9.

SCHOLION.

283. *Dilata tantisper doctrina* Proportionis Arithmeticæ, *quæ habita scientia Proportionis Geometricæ facilius intelligitur, hoc capite solius Proportionis Geometricæ doctrinam proponemus.*

DEFINITIO VII.

284. *Proportio continua* dicitur, dum terminus *Consequens* Rationis primæ est terminus *Antecedens* secundæ; ut $a:b = b:c$, vel $8:4 = 4:2$. *Discreta* appellatur, dum Rationum Antecedentes diversi sunt, ut $a:b = c:d$, vel $8:4 = 6:3$.

HYPOTHESIS IV.

285. Proportio continua *exprimitur ita*; a.b.c, *vel etiam præfixo signo* $\div\!\div$ (§. 38.) *ut* $\div\!\div$ a.b.c.d.*&c. enunciatur*; a *est ad* b, *sicut* b *est ad* c, *&* b *est ad* c, *sicut* c *est ad* d &c.

THEOREMA IV. FUNDAMENTALE.

286. PROP. *In omni Proportione Geometrica, factum Extremorum* (id est termini primi cum ultimo) *est æquale facto Mediorum* (*seu* secundi cum tertio.) *Nempe si sit*, $a:b = c:d$, *erit* $ad = bc$.

DEMONSTRATIO.

Exprimatur cum exponentibus, ut sit $\overset{m}{a:b} = \overset{m}{c:d}$, & per (§. 277.) substituendo *mb* loco *a*, & *md* loco *c*, erit eadem pro-

por-

portio, $mb:b = md:d$, ſed in hac factum extremorum eſt $mb.d$, & factum mediorum eſt $b.md$, hoc eſt $mbd = mbd$. Ergo etiam $ad = bc$ per (§. 221.) Q. E. D.
Aliter: cum ſit $a = mb$, & $c = md$ per (§. 276.) ſubſtituantur hi valores in Æquatione $ad = bc$, & habebitur $mbd = mdb$. Q. E. D.
Declaratur: ſit $8:4 = 6:3$, erit $8.3 = 4.6$, id eſt $24 = 24$.

SCHOLION.

287. *Hoc Theorema eſſe baſim reliquorum ferè omnium Theorematum, ac Problematum Proportionis, præcipiumque fundamentum inveniendarum primarum Æquationum Analyticarum Tyrones noſſe volo. Ex hoc enim præter cætera (ope Analyſis) ſequentia Tria utiliſſima, Problemata reperta ſunt.* Primum *eſt celeberrima illa Regula* Trium, *quæ etiam ob ſummam utilitatem, maximumque in ſcientiis, vitæque humanæ commercio uſum, merito nomen obtinuit* Regulæ Aureæ; *de qua Cap. V.* Secundum Problema *non minus utile eſt;* datis duobus terminis invenire Tertium. *Et denique* III. Problema *eſt*, datis duobus invenire medium. *Itaque*

PROBLEMA I.

288. PROP. *Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem; ſeu invenire Regulam auream.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Secundus* $= b$, *Tertius* $= c$, *Quartus quæſitus* $= x$, *erit proportio:* $a:b = c:x$, *&* *per Theor. Anteced.* $ax = bc$, *& per Reg. IV.* (§. 236.) *dividendo utramque partem per* a, *habebitur* $x = \frac{bc}{a}$, *quæ ultima Æquatio, utpote Reſolutoria, hoc Problema eloquitur.* Quartus x, eſt æqualis facto ex termino ſecundo *b*, in Tertium *c*, & diviso per Primum *a*; *id est*: Si vis invenire quartum Proportionalem, multiplica secundum cum tertio, & factum divide per Primum, Quotus erit quartus Proportionalis; *quæ verba sunt ipsissima, quibus Arithmetici regulam auream edocent, à quibus, si quæras, cur non Primus cum Tertio multiplicari debeat, & dividi per Secundum; hanc rationem rogando actum ages, nî Analysim edocti sint, cui regulas suas* Arithmetica *repertas, demonstratasque debet.* Notandum: *Cum sit quartus* $x = \frac{bc}{a}$ *semper loco termini* quarti *substitui potest per* (§.222.) tertius *multiplicatus per* secundum, *& divisus per* primum, *eritque proportio* $a : b = c : \frac{bc}{a}$

PROBLEMA II.

289. PROP. *Datis duobus terminis invenire Tertium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Secundus* $= b$, *& Tertius quæsitus* $= x$, *erit proportio*; $a : b = b : x$, *& per Theor* (§.286.) $ax = bb$, *& per Reg. IV.* (§.236.) $x = \frac{bb}{a}$, *hoc est*: Quadratum *termini* Secundi *dividatur per* Primum, *quotus erit* Tertius *quæsitus*, *ut si sit* $2 : 4 = 4 : x$, *erit* $2x = 16$, *&* $x = \frac{16}{2} = 8$: *id est* $2 : 4 = 4 : 8$.

PROBLEMA III.

290. PROP. *Datis terminis duobus invenire medium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Tertius* $= b$, *Medius* $= x$, *erit proportio*, $a : x = x : b$, *& per Theor.* (§.286.) $xx = ab$, *& extrahendo* $\sqrt{}$ *per Reg. VII.* (§.236.) *erit* $x = \sqrt[2]{ab}$, *hoc est*: ex facto termini Primi in Tertium extrahatur radix quadrata, erit hæc medius proportionalis, *ut si sit, quærendus inter numerum* 2 *&* 8, *medius*, *erit* $2 : x = x : 8$, *hoc est* $xx = 16$, *&* $x = \sqrt{16} = 4$, *est ergo* $2 : 4 = 4 : 8$.

THE-

THEOREMA V. FUNDAMENTALE.

291. PROP. *Si factum extremorum est æquale facto mediorum, factores erunt reciprocè proportionales; ut si sit* ad = bc, *erit* a:b = c:d, *hoc est, si in producto* ad, *assumatur factor* a, *(arbitrariè) pro* primo *termino proportionis, tunc ejusdem producti* ad, *alter factor* d *poni debet pro* quarto; *factores verò alterius producti* bc, *nempe* b *&* c *poni debent loco medio.*

Hæc Propositio (utpote conversa Theorematis IV.) nova Demonstratione non eget.

COROLLARIUM I.

292. Duorum itaque productorum æqualium factores solvi possunt in proportionem reciprocam, eamque variam, ut si detur $abc = dgf$, erit proportio reciproca, $a : f = dg : bc$, vel $a : gf = d : bc$, aut $a : df = g : bc$ &c. quæ resolutio insignem usum habet in Analysi ad invenienda Theoremata.

COROLLARIUM II.

293. Quoniam factores in proportionem reciprocam varie disponi possunt, sequitur varias inde enasci terminorum transpositiones manente proportione; manent autem termini proportionales, si eorum factum extremorum sit æquale facto mediorum per (§. 286.) hinc, ut in subjecta Tabula (exhibente variam terminorum transpositionem proportionalem) demonstretur factum extremorum esse æquale facto mediorum, nullo alio medio opus est, quam, ut (per Theorema I. §. 276.) loco literæ a, ponatur mb, & loco literæ c substituatur md. Sit itaque

	Algebraicè.	*Numericè.*
	$ad = bc$	$8 . 3 = 6 . 4$
erit	$a : b = c : d$	$8 : 4 = 6 : 3$
Alternando	$a : c = b : d$ *seu permu-*	$8 : 6 = 4 : 3$
Invertendo	$c : a = d : b$ *tando*	$6 : 8 = 3 : 4$
Iterum Altern.	$c : d = a : b$	$6 : 3 = 8 : 4$

Item Algebraicè.

Sit	$a : b = c : d$
Dividendo	$a - b : b = c - d : d$
Componendo	$a + b : b = c + d : d$
Convertendo	$a : a - b = c : c - d$
Mixtim	$a + b : a - b = c + d : c - d$
Item	$a + c : b + d = a : b$
Aut	$a - c : b - d = a : b$

Item Numericè.

Sit	$8 : 4 = 6 : 3$
Dividendo	$8 - 4 : 4 = 6 - 3 : 3$
Componendo	$8 + 4 : 4 = 6 + 3 : 3$
Convertendo	$8 : 8 - 4 = 6 : 6 - 3$
Mixtim	$8 + 4 : 8 - 4 = 6 + 3 : 6 - 3$
Item	$8 + 6 : 4 + 3 = 8 : 4$
Aut	$8 - 6 : 4 - 3 = 8 : 4$

Quæ omnes proportiones iterum *Alternando*, & *Invertendo* &c. varie permutari possunt, adeo, ut hæc exigua Tabella octo insignia Theoremata complectatur.

SCHOLION.

294. *Quemadmodum Theorema IV. unicum fere est fundamentum omnium proportionum, harumque ope reperiendarum primarum Æquationum per Synthesim*, *ita Theorema V.* locus communis *habetur inveniendorum Theorematum, ac Problematum per Analysim, ut oretenus, & suo loco plura dicentur.*

THE-

THEOREMA VI.

295. PROP. *Quæ ſunt proportionalia uni Tertio, ſunt etiam proportionalia inter ſe, ut ſi ſit* a:b = c:d, *&* e:f = c:d, *erit etiam* a:b = e:f.

Demonſtratio patet ex (§. 286.) & numeris ſubſtitutis declaratur.

THEOREMA VII.

296. PROP. *Si quatuor termini proportionales, multiplicentur per alios quatuor ipſis correſpondentes proportionales, facta erunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Sit $\overset{m}{a} : b = \overset{m}{c} : d$

& $\overset{n}{e} : f = \overset{n}{g} : h$, dico fore $ae : bf = cg : dh$, nam ſubſtituendo per (§.277.) loco antecedentium, conſequentes per exponentes multiplicatos, erit: $mbnf : bf = mdnh : dh$, in qua factum extremorum æquale facto mediorum per (§. 286.) ergo. Idem in numeris patet.

COROLLARIUM.

297. Hinc ſi *Radices* ſunt proportionales, erunt etiam proportionales, earundem *Quadrata*, *Cubi*, &c. ſeu univerſaliter, earundem poteſtates quæcunque ſimiles.

THEOREMA VIII.

298. PROP. *Si quatuor Termini proportionales dividantur per alios ipſis cor-*

respondentes proportionales, quoti erunt proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit $ae:bf = cg:db$

& divis. $\overline{e}:\overline{f} = \overline{g}:\overline{b}$, erit $a:b = c:d$, ut patet.

COROLLARIUM.

299. Quadratorum, Cuborum, & universim potestatum similium radices similes, sunt proportionales.

THEOREMA IX.

300. PROP. Rationes *Æquemultiplæ*, (*hoc est* per eandem quantitatem multiplicatæ) *item* Rationes *Submultiplæ* (*seu* per eandem quantitatem divisæ) *sunt*, *ut* simplæ, *hoc est*, *simplis proportionales*.

DEMONSTRATIO.

I. Sit $a:b$, cujus tam antecedens, quam consequens multiplicetur per d, dico fore $ad:bd = a:b$. Nam per (§.286.) $abd = abd$. Quod erat primum.

II. Sit $ad:bd$, & dividatur uterque terminus per d, erit $\frac{ad}{d} : \frac{bd}{d} = a\ b$, ut patet ex (§.35.) idem est in numeris.

Nam sit $6:3$, & multiplicentur per 4, erit $24:12 = 6:3$, item dividantur $24:12$, per 3, erit $8:4 = 6:3$.

THE-

THEOREMA X.

301. PROP. *Si sint duæ proportiones, in quibus (sibi invicem subscriptis) lineæ ad inæquales quantitates ductæ, sunt* Æquedistantes *seu parallelæ, erunt hæ quantitates proportionales ex* Æquo.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b=c:d$

Secunda $b:f=d:g$, dico fore $a:f=c:g$ nam alternando utramque.

erit Prima $a:c=b:d$

Secunda $b:d=f:g$, ergo per (§.295.)

$a:c=f:g$, seu altern. $a:f=c:g$. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6=8:4$

$6:3=4:2$, erit $12:3=8:2$, ut patet ex (§.286.)

THEOREMA XI.

302. PROP. *Si in duabus proportionibus sibi invicem subscriptis, lineæ ad inæquales quantitates ductæ, sint* Convergentes, *erunt hæ quantitates proportionales* ex Æquo perturbato.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b=c:d$

& *Secunda* $b:f=g:c$, dico fore, $a:f=g:d$, nam in Prima $ad = bc$, & in Secunda $bc = fg$, per (§. 286.) ergo per (§. 221.) $ad = fg$, sed hæc resolvitur in hanc $a:f = g:d$ per (§. 291.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 8:4$

& $6:3 = 16:8$, erit $12:3 = 16:4$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XII.

303. PROP. *Si in duabus proportionibus* Primi Antecedentes, *&* Ultimi Consequentes, *vel vicissim, æquales sunt, erunt reliqui termini* reciproce *proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b = c:d$

$a:f = g:d$, dico fore $b:f = g:c$. Demonstratio eadem, quæ Theorematis prioris.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 8:4$

$12:3 = 16:4$, erit $6:3 = 16:8$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XIII.

304. PROP. *Si in duabus proportionibus* bini antecedentes, *vel* bini consequentes, *æquales sunt, erunt reliqui termini proportionales.*

DE-

DEMONSTRATIO.

$$\text{Sit}\ \left.\begin{array}{l} a:b = c:d \\ \ | \qquad\ | \\ a:f = c:g \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{erunt} \\ \text{altern.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} a:c = b:d \\ a:c = f:g \end{array}\right.$$

ergo per (§. 295.) $b:d = f:g$. Q. E. D.

IN NUMERIS.

$$\text{Sit}\ \begin{array}{l} 12:6 = 16:8 \\ \ \ | \qquad\ \ | \\ 12:3 = 16:4 \end{array}$$

$12:3 = 16:4$, erit $6:8 = 3:4$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XIV.

305. PROP. *Si sint quotcunque termini proportionales, erit summa* omnium Antecedentium, *ad summam* omnium consequentium, *ut quivis* antecedens *ad suum* consequentem.

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sit}\ \overset{m}{a:b} \\ \&\ \ \overset{m}{c:d} \\ \&\ \ \overset{m}{f:g} \end{array}\right\}\ \text{erit}\ a+c+f:b+d+g = a:b,$$

substituendo loco $a+c+f$, eorundem valores per (§. 277.) erit $mb+md+mg:b+d+g = mb:b$, sed in hac per (§. 286.) est

$$mbb+mdb+mgb = mbb+mbd+mbg.$$

ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sit}\ 12:6 \\ \quad\ 16:8 \\ \quad\ \ 4:2 \end{array}\right\}\ \text{erit}\ 12+16+4:6+8+2 = 12:6$$

hoc est, $32:16 = 12:6$, ut patet ex (§. 286.)

SCHO-

SCHOLION.

306. *Quæ hucusque dicta sunt, pertinent ad proportiones ortas ex rationibus simplicibus, supersunt quædam in compendio referenda de Rationibus compositis, & harum proportionibus, ac progressionibus, de quibus tamen pluribus in Geometria tractabitur. Itaque.*

CAPUT III.

De Ratione Composita, & Progressione Geometrica continua.

DEFINITIO VIII.

307. *Ratio Composita* dicitur comparatio *Producti* ex antecedentibus duarum, vel plurium Rationum simplicium orti, cum *Producto* ex consequentibus earundem Rationum facto; ut si sint duæ Rationes simplices $a:b$ & $f:g$, erit productum ex antecedentibus af, productum ex consequentibus bg, & hinc *Ratio Composita* $af:bg$. Idem est in numeris.

THEOREMA XV.

308. PROP. *Exponens Rationis Compositæ est* Productum *omnium exponentium, quæ datam rationem compositam constituunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $\overset{m}{a:b}$ & *Secunda* $\overset{n}{f:g}$ $\Big\}$ erit ratio composita $\overset{mn}{af:bg}$ cujus exponens mn.

Nam substituendo per (§.277.) mb loco a & ng loco f, erit Ratio composita eadem $mnbg$:

mnbg:*bg*, ſed hujus exponens eſt *mn*, utpote quotus per (§.267.) ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $\left.\begin{array}{l} 8 \overset{4}{:} 2 \\ 10 \overset{2}{:} 5 \end{array}\right\}$ erit Compoſita 8.10:5.2, hoc eſt 80:10, cujus exponens eſt 8 = 4.2.

COROLLARIUM I.

309. Hinc I. In Ratione compoſita, orta ex duabus Rationibus ſimplicibus *æqualibus* (hoc eſt, habentibus eundem exponentem) Exponens ſemper eſt quadratum exponentis ſimplicis, ut ſi ſit compoſita $ac \overset{mm}{:} bd$ orta ex duabus Rationibus $a \overset{m}{:} b$ & $c \overset{m}{:} d$, habentibus eundem exponentem m, erit mm, vel m^2, exponens compoſitæ $ac:bd$; qui exponens mm, eſt *Quadratus* de m rationis ſimplicis $a \overset{m}{:} b$; & hinc hujusmodi Ratio compoſita, vocatur *Ratio Quadratica*, aut *Duplicata* (*NB.* non dupla) diciturque Antecedens Rationis hujusmodi. *Ex.gr.* Antecedens ac, dicere ad conſequentem ſuum bd rationem *duplicatam*, aut *quadraticam*, Antecedentis ſimplicis a, ad conſequentem ſuum b, hoc eſt, ut $aa:bb$. II. Eodem modo Exponens rationis compoſitæ, ortæ ex tribus Rationibus ſimplicibus æqualibus, eſt *Cubus* exponentis ſimplicis, diciturque *Ratio Triplicata*, (non *Tripla*) & Antecedens rationis hujus compoſitæ ad ſuum conſequentem dicitur eſſe in *Ratione Triplicata* Antecedentis ſimplicis ad ſuum Conſequentem. Eodem modo intelligenda eſt *Ratio quadruplicata* &c.

CO-

COROLLARIUM II.

310. Quoniam in proportione Geometrica continua idem omnium Rationum exponens est, per (§. 284.) sequitur, quod *primus sit ad tertium in Ratione duplicata seu quadratica primi ad secundum*, seu, ut *quadratum Primi, ad quadrat. Secundi.* Sic si sit $\div a \overset{m}{.} b \overset{m}{.} c$ &c. erit $a : c = aa : bb$, nam $a : c = ab : bc$ per (§. 300.), sed in hac substituendo per (§. 277.) mb loco a, & mc loco b, erit $mmc : c = mmcb : bc$, in qua exponens est mm, sed etiam $aa : bb$ habet exponentem mm, nam substituendo mb loco a, erit $mmbb : bb$. ergo. II. Ex eodem ratiocinio clarum est, quod *primus sit ad quartum in ratione triplicata primi ad secundum*, sit $a . b . c . d .$ &c. erit $a : d = aaa : bbb$. seu, ut *cubus primi ad cubum secundi*. Idem clarum fit in Numeris, sit enim $\div 2 \overset{2}{.} 4 \overset{2}{.} 8 \overset{2}{.} 16$. &c. erit terminus primus 2 ad tertium 8, hoc est $2 : 8$ in ratione *duplicata* primi 2 ad secundum 4, seu $2 : 4$, hoc est $2 . 2 : 4 . 4$, id est $4 : 16$ nam $2 : 8 = 4 : 16$, ut patet per (§. 286.) & hinc universaliter: *Potentiæ sunt in tantuplicata ratione radicis, seu laterum, quot unitates habet exponens datæ potentiæ.* Sed hæc viva voce docentis clariora reddentur.

SCHOLION.

311. *Tyrones Theorema hoc cum suis corollariis probe velim memoria retineant, utpote quæ per omnem Geometriam, & Philosophiam naturalem identidem usurpanda veniunt.*

DEFINITIO IX.

312. *Progressio* dicitur certa series quantitatum continue proportionalium; ut $\div 1 \overset{3}{.} 3 \overset{3}{.} 9 \overset{3}{.} 27 \overset{3}{.} 81 \overset{3}{.} 243$ &c.

SCHOLION I.

313. *In specie, si series continua sint termini arithmetice proportionales* (§.280.) *dicitur* Progressio Arithmetica, *ut*

$$\begin{matrix} & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1, & & 3, & & 5, & & 7, & & 9, & & 11 \end{matrix}$$

&c. ad hanc revocantur I. Progressio numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5, 6, *&c. Item Progressio figuratorum quorundam, ut*

$$\begin{matrix} & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \\ 3, & & 6, & & 10, & & 15, & & 21 \end{matrix}$$

quorum differentiæ sunt numeri naturales. II. Progressio *dicitur* Geometrica, *si termini sint continue Geometrice proportionales, ut* ÷

$$\begin{matrix} & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1. & & 2. & & 4. & & 8. & & 16. & & 32. \end{matrix}$$

&c. Progressiones cumprimis Arithmeticæ, & Geometricæ sunt vel crescentes, *vel* decrescentes. Crescentes *dicuntur si termini crescant*; *ut* 1. 2. 4. 8. 16 *&c.* decrescentes, *si termini decrescant, ut* ÷ 32. 16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$ *&c.*

SCHOLION II.

314. *Quoniam nobis hic de Progressione Geometrica agendum, multum juvabit, Tyronibus expressionem universalem per literas ob oculos ponere, quarum formularum contemplatione sola condiscimus, quæ fuse cæteroquin demonstranda forent. Sint itaque termini Progressionis Geometricæ crescentis sub exponente* m,

$$\begin{matrix} & m & & m & & m & & m & & m & \\ \text{Ex. gr.} \div a. & & b. & & c. & & d. & & e. & & f \end{matrix}$$

&c. patet eam per substitutionem exponentium juxta (§. 277.) *recte sic exprimi* ÷ $a . m^1 a . m^2 a . m^3 a . m^4 a . m^5 a$ *&c. nam cum sit crescens erit* $b = ma$, *&* $c = mb = mma$, *seu* $m^2 a$, *&* $d = mc = mmma$, *seu* $m^3 a$, *&* $e = md = m^4 a$, *&* $f = me = m^5 a$ *&c. idem patet in decrescente. Hinc omnes Progressiones Geometricæ per sequentes binas classes recte designantur.*

TABULA PROGRESSIONUM GEOMETRICARUM.

Num. termin.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens	÷ a.	$m^1 a$.	$m^2 a$.	$m^3 a$.	$m^4 a$.	$m^5 a$.	$m^6 a$.	*&c.*
Decrescens	÷ a.	$\frac{a}{m^1}$.	$\frac{a}{m^2}$.	$\frac{a}{m^3}$.	$\frac{a}{m^4}$.	$\frac{a}{m^5}$.	$\frac{a}{m^6}$.	*&c.*

In

IN NUMERIS.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens	∺ 1 .	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64	&c.
per Expon.	∺ 1 .	2^1 .	2^2 .	2^3 .	2^4 .	2^5 .	2^6	&c.
Decrescens	∺ $\frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2^1}$.	$\frac{64}{2^2}$.	$\frac{64}{2^3}$.	$\frac{64}{2^4}$.	$\frac{64}{2^5}$.	$\frac{64}{2^6}$	&c.
Hoc est	∺ $\frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2}$.	$\frac{64}{4}$.	$\frac{64}{8}$.	$\frac{64}{16}$.	$\frac{64}{32}$.	$\frac{64}{64}$	&c.
id est	∺ 64 .	32 .	16 .	8 .	4 .	2 .	1	&c.

NB. *Puncta inter terminos posita non indicant multiplicationem, sed tantum separationem terminorum.*

Jam contemplando imprimis seriem crescentem a . ma . m^2a *&c. sequentia Theoremata, & Problemata deducuntur.*

315. THEOREMA. Factum extremorum est æquale facto terminorum quorumvis ab extremis æquedistantium, aut si termini sint impares, quadrato medii. *Sic factum ex termino primo* a, *& termino septimo* m^6a *est* m^6a^2, *quod est æquale facto ex termino secundo* ma, *& sexto* m^5a, *quod etiam est* m^6a^2, *sic factum tertii* m^2a, *& quinti* m^4a *est* m^6a^2, *& quadratum quarti est* m^6a^2. *Idem patet in numeris, nam factum primi* 1, *& septimi* 64, *est* 64 . 1 = 64, *sed etiam factum secundi, & sexti est* 2 . 32 = 64, *factum tertii, & quinti est* 4 . 16 = 64; *quadratum medii* 8 *est* 8 . 8 = 64.

316. THEOREMA. Omnis terminus, est productum ex termino primo, & ex exponente elevato ad potestatem uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini. *Sic terminus* Ex. gr. *septimus* m^6a, *est factum ex exponente* m, *elevato ad sextam potentiam, hoc est* m^6, *& multiplicato per primum* a, $= m^6a$. *Idem est in numeris; sic quartus* 8, *est factum ex exponente* 2, *elevato ad tertiam potentiam nempe* 2 . 2 . 2 = 2^3, *multiplicato per primum* 1. *Hinc eruuntur sequentia Problemata.*

PRO-

317. PROBLEMA. Dato termino primo, & exponente rationis, invenire terminum quemvis. Resolutio, *datus Exponens elevetur ad potentiam uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini, factum multiplicetur per Primum; sic si detur exponens* 2, *& primus* 1, *& quæratur sextus terminus, erit* 2.2.2.2.2.1 = 32.1 = 32, *qui est terminus sextus, ut patet ex Tabula*

318. COROLLARIUM. *Hinc si quæratur terminus* maximus, *invenitur is eodem modo, ut quivis alter. Terminus verò* minimus *habebitur, si terminus* maximus (*per prius dicta inventus*) *dividatur per exponentem elevatum uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini maximi. Sic detur terminus maximus* 32, *qui sexto loco consistit, & exponens detur* 2, *erit* 2.2.2.2.2 = 32, *per quem dividendo* 32, *erit quotus* = 1, *hoc est minimus. Et universaliter formula termini* Maximi *est* $m^{n-1}a$, *& termini* Minimi $m^{n-1}a : m^{n-1}$, *in qua* m *denotat exponentem datæ rationis*, n − 1 *denotat exponentem potentiæ, vel potestatis de* m *elevato ad gradum unum inferiorem, quam numerus localis termini cujuscunque.* a *verò denotat primum terminum. Porro ex contemplatione seriei crescentis* a . ma . m²a *&c. habetur sequens.*

319. THEOREMA: Exponens rationis *m* est æqualis $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a}$ *hoc est* $\sqrt[n-1]{m^{n-1}} = m$ *hoc est* Terminus datus quivis (*seu maximus*) divisus per terminum primum, & ex quoto extracta radix, potentiæ uno gradu inferioris, quam sit numerus localis termini, est exponens datæ rationis. *Hinc habetur resolutio sequentis problematis.*

320. PROBLEMA: Dato termino primo, termino ultimo (*seu maximo*) & dato numero terminorum, (*seu quotum locum terminus ultimus occupat*) invenire exponentem rationis. Ex. gr. *Datur terminus primus* = 1, *terminus ultimus* = 8, *datus numerus terminorum* = 4 (*hoc est, numerus* 8 *consistit quarto loco in data serie*) invenire exponentem. *Vocetur is* = x

erit is per formulam generalem $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a} = \sqrt[4-1]{x^{4-1} 1 : 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$ *hoc est* $\sqrt[3]{8 : 1} = \sqrt[3]{8} = 2$ *hoc est*: Terminus datus ultimus dividatur per primum, & ex quoto extrahatur radix potentiæ uno gradu inferioris, quam sit terminorum numerus, erit radix hæc quæsitus exponens rationis. *Hinc porro sequitur.*

321. THEOREMA: Si primus terminus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per exponentem rationis una unitate mulctatum, & huic quoto addatur terminus ultimus, habetur summa omnium terminorum. *Seu, cum ultimus sit* $= m^{n-1}a$, *primus* $= a$ *exponens rationis* $= m$, *erit residuum, si primus ab ultimo subtrahatur* $= m^{n-1}a - a$, *& dividendo per* $m - 1$, *erit quotus* $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, *& huic addendo ultimum* $m^{n-1}a$, *habebitur summa* $= m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, *quæ est formula universalis reperiendæ summæ. Hinc resolvitur sequens*

322. PROBLEMA: Dato termino primo, dato termino ultimo, & dato exponente rationis, invenire summam omnium terminorum. *Ut si detur terminus primus* $= 1$, *terminus ultimus* $= 64$, *exponens rationis* $= 2$, *erit vi formulæ, terminus primus* $a = 1$, *ultimus* $m^{n-1}a = 64$, *& exponens* $m = 2$, *& hinc vi formulæ* (§.321.) *erit summa*; $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : m - 1 = 64 + (64 - 1) : (2 - 1)$ *hoc est* $64 + (63 : 1) = 64 + 63 = 127$, *ut patet ex Tabula*: (§. 314.) *nam*

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

323. COROLLARIUM: *Quotiescunque itaque quæritur summa, nota esse debent hæc tria.* I. terminus primus, II. terminus ultimus, & III. exponens rationis. *Hinc quotiescunque datur bujusmodi problema resolvendum, & ex his tribus defeciat unum, in id prius, per superiora problemata inquirendum est. Ex. gr. Si daretur terminus primus, & exponens, & non daretur ultimus, in hunc ultimum prius inquirendum est per* (§.317.) *aut si daretur terminus primus,*

mus, & ultimus, & non daretur exponens, hic exponens prius inveniri debet per (§. 320.) *denique ex his liquet.*

324. PROBLEMA: Datis duobus terminis invenire quotcunque medios proportionales. *Nam cum semper detur terminus primus, terminus ultimus, & numerus terminorum, invenietur ex his per* (§. 320.) *exponent rationis, quo invento formari possunt quodcunque termini per* (§. 317.)

SCHOLION I.

325. *Exemplis hæc quidem pluribus illustrari deberent, quæ, ne in molem excrescat liber ad* Exercitationes Analyticas *reservamus. Porro quæ de progressione* crescente *dicta sunt, eodem modo de* decrescente *vera esse applicanti patebit, maxime si Tyro animadvertat, omnem decrescentem, fore crescentem, & vicissim crescentem mutari in decrescentem, modo seriem consideret progredientem à dextris sinistram versus, & contra.*

SCHOLION II.

326. *De proportione, & progressione jam Arithmetica brevibus; nam* universaliter, *quæ de proportione, & progressione Geometrica demonstrantur adhibendo* multiplicationem, & divisionem, *item* elevationem *ad* potestatem, *vel* extrahendo $\sqrt{}$, *hæc de proportione, & progressione Arithmetica intelligenda sunt adhibendo loco multiplicationis,* Additionem, *& loco divisionis,* Subtractionem, *loco quadrati, multiplicationem per* 2, *loco cubi, multiplicationem per* 3, *&c. loco extractionis* $\sqrt{}$, *divisionem per* 2, *& loco extractionis* $\sqrt[3]{}$, *divisionem per* 3, *&c.*

CAPUT IV.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

THEOREMA XVI.

327. PROP. *In Proportione Arithmetica* (§. 280.) *summa extremorum est æqualis summæ mediorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit Majoritatis $a \overset{d}{,} b = c \overset{d}{,} f$, erit $a + f = b + c$ nam ſubſtituendo per (§. 278.) erit $a = d + b$, & $c = f + d$, & hinc proportio $d + b, b = f + d, f$. ſumma extremorum $d + b + f = b + f + d$ ſummæ mediorum. In Numeris ſit $3, 5 = 7, 9$ erit $3 + 9 = 5 + 7$ hoc eſt $12 = 12$.

328. COROLLARIUM I. *In continua* $a, b = b, c$ *ſumma extremorum* $a + c = 2b$, *hoc eſt, duplo medii; ut ſit* $3, 5 = 5, 7$ *erit* $3 + 7 = 5 + 5$, *ſeu* $3 + 7 = 10$.

329. COROLLARIUM II. *Quartus Arithmetice proportionalis invenitur, ſi à ſumma mediorum (hoc eſt ſecundi & tertii) ſubtrahatur Primus. Nam* $a, b = c, x$ *erit* $a + x = b + c$, *& per Metatheſim* $x = b + c - a$. *Sic ſi detur* $3, 5$ *&* 7, *& quæratur quartus* x, *erit* $3, 5 = 7, x$, *hoc eſt* $3 + x = 5 + 7$, *& per Metatheſ.* $x = 5 + 7 - 3 = 12 - 3 = 9$.

330. COROLLARIUM III. *Tertius continue Proportionalis obtinetur, ſi à duplo ſecundi ſubtrahatur primus, ut ſi dentur* 3 *&* 5, *& quæratur tertius* x, *erit* $3, 5 = 5, x$ *hoc eſt* $3 + x = 5 + 5$ *hoc eſt* $3 + x = 10$; *& per Metatheſ.* $x = 10 - 3 = 7$, univerſaliter: $a, b = b, x$ *erit* $a + x = 2b$, *&* $x = 2b - a$.

331. COROLLARIUM IV. *Medius proportionalis invenitur, ſi ſumma Primi & Tertii dividatur per 2, nam* $a, x = x, c$, *hoc eſt* $a + c = x + x$, *ſeu* $a + c = 2x$ *& dividendo* $\frac{a + c}{2} = x$, *ſic ſit dentur* 3 *&* 7, *& quæratur medius* x, *erit* $3, x = x, 7$, *hoc eſt* $3 + 7 = 2x$, *ſeu* $\frac{3 + 7}{2} = x = \frac{10}{2} = 5$.

SCHOLION.

332. *Liquet itaque ex his, quæ (§. 326.) monui eodem quoque modo ratiocinandum eſſe de progreſſioni-*

bus

bus Arithmeticis, *quemadmodum de Geometricis dictum*, *adhibendo videlicet*, *loco multiplicationis*, Additionem, *& in locum divisionis* subtractionem, *&c.* *igitur sit series Arithmetica crescens* $a, \overset{d}{b}, \overset{d}{c}, \overset{d}{f}, \overset{d}{g}, \overset{d}{h}$ *&c.* *exprimetur hæc recte per substitutionem differentiarum*, *juxta doctrinam* (§. 278.) *declaratam.*

Sit	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
cresc.	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$	*&c.*
In		2	2	2	2	2	2	
Num.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13	*&c.*

Ex cujus contemplatione sequentia innotescunt Theoremata, *ac Problemata.*

333. THEOREMA. Summa extremorum, est æqualis summæ quorumvis æquedistantium ab extremis, aut (*si termini sint impares*) duplo medii. *Sic summa primi*, *& septimi est* $a + a + 6d = 2a + 6d$. *Summa secundi & sexti* $a + d, + a + 5d = 2a + 6d$. *Summa tertii & quinti* $a + 2d, + a + 4d = 2a + 6d$, *duplum medii* $a + 3d$, *seu* $(a + 3d) . 2 = 2a + 6d$, *idem patet in numeris.*

334. THEOREMA. Quivis terminus componitur ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt numeri terminorum dempto uno, *seu* est aggregatum ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt termini antecedentes. *Sic* Ex. gr. *terminus sextus* $a + 5d$, *constat termino primo* a *plus quinque differentiis*; *quot nempe termini hunc antecedunt. Idem patet in Numeris. Ex his deducuntur sequentia Problemata.*

335. PROBLEMA I. Dato termino primo, & differentia rationis, invenire terminum quemvis. *Sit primus* $= a$, *differentia* $= d$, *numerus terminorum* $= n$, *terminus quæsitus sit* $= x$ Resolutio: *multiplicetur differentia per numerum terminorum una unitate mulctatum*, *& facto huic addatur primus*, *erit aggregatum*, *terminus quæsitus*, *id est* $(d . n - 1) + a$, *hoc est* $dn - d + a = x$, *quæ est formula universalis pro quocunque termino*, *excepto primo*; *sit in numeris primus* $a = 1$, *differentia* $d = 2$, *& quæratur sextus*, *erit numerus terminorum* $6 = n$, *adeoque* $a + nd - d = 1 + 12 - 2 = 11$.

336. COROLLARIUM I. *Cum in data progressione ad libitum poni possit terminus quicunque pro ultimo, si is vocetur* $=u$, *erit generalis formula pro ultimo, seu maximo termino* $u=a+nd-d$. *Hinc terminus ultimus seu maximus eodem modo reperitur, quo quivis alius.*

337. COROLLARIUM II. *Quod si detur differentia* $=d$, *numerus terminorum* $=n$, *& terminus ultimus* $=u$, *& quæratur primus* x, *erit* $u=x+dn-d$, *& per Metathesim* $u-dn+d=x$, *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & à summa subtrahatur factum ex differentia, & numero terminorum, erit residuum æquale primo. Sit* $u=13$, *&* $d=2$, *&* $n=7$, *erit primus* $13-14+2=1$.

338. PROBLEMA II. Dato termino primo $=a$, dato ultimo $=u$, & dato numero terminorum $=n$ invenire differentiam; *sit quæsita differentia* $=x$, *erit* $u=a+xn-x$, *& per Metathesim* $u-a=xn-x$, *& dividendo per* $n-1$, *erit* $\frac{u-a}{n-1}=x$, *hoc est;* Ab ultimo subtrahatur primus, Residuum dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, erit quotus differentia. Ex. gr. *Sit primus* $a=1$, $u=13$, *numerus terminorum* $n=7$, *erit formula;* $\frac{u-a}{n-1}=\frac{13-1}{7-1}$, *hoc est* $\frac{12}{6}=2$.

339. PROBLEMA III. Dato termino primo $=a$, dato termino ultimo $=u$, & data differentia $=d$, invenire numerum terminorum; *Sit numerus terminorum quæsitus* $=x$, *erit* $u=a+dx-d$, *& per Metath.* $u+d-a=dx$, *& dividendo per* d, *erit* $\frac{u+d-a}{d}=x$ *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & subtrahatur primus, residuum dividatur per differentiam, erit quotus numerus terminorum. Sic si* $a=1$, $u=13$, $d=2$, *erit vi formulæ* $\frac{u+d-a}{d}=\frac{13+2-1}{2}=\frac{14}{2}=7$

340. PROBLEMA IV. Dato termino primo $=a$ & ultimo $=u$, & numero terminorum $=n$, invenire summam omnium terminorum; *erit Resolutoria formula* $u+a$.

$(u+a) \cdot \frac{n}{2}$ *seu* $\frac{nu+na}{2}$, *hoc est, ad ultimum addatur primus, & summa multiplicetur per dimidium numerum terminorum.*

341. PROBLEMA ULTIMUM. Dato termino primo $= a$, data summa omnium terminorum $= S$, & dato numero terminorum $= n$, invenire differentiam. *Sit hæc* $= x$, *itaque terminus ultimus* $= a + nx - x$, *per* (§. 336.) *adeoque summa omnium per* (§. 340.) $S = (2a + nx - x) \cdot \frac{n}{2}$, *hoc est* $\frac{2an + nnx - nx}{2} = S$ *& multiplicando per* 2, *erit* $2an + nnx - nx = 2S$, *& per Metathesim* $nnx - nx = 2S - 2an$, *dividendo per* $nn - n$, *erit* $x = \frac{2S - 2an}{nn - n}$, *quæ est formula resolutoria. Ut si sit* $S = 49$, $a = 1$, $n = 7$, *erit vi formulæ*, $\frac{98 - 14}{49 - 7} = \frac{84}{42} = 2$, *quæ est differentia terminorum.*

SCHOLION I.

342. *Doctrina progressionum a* §. 312. *hucusque tradita, procedit de omnibus etiam fractis. In his tamen, cum variæ esse possint, considerandi veniunt tam* numeratores, *quam* denominatores; *sunt enim quædam, in quibus manente eodem numeratore, denominatores progrediuntur in ratione vel Geometrica, vel Arithmetica, & sunt quædam, quarum tam numeratores, quam denominatores, vel tantum Geometrice, vel solum Arithmeticè procedunt; sunt item aliæ, in quibus numeratores progrediuntur Arithmetice, denominatores verò Geometricè, aut vicissim &c. eæque omnes vel sunt crescentes, vel decrescentes, hujusmodi tamen progressiones, si series numeratorum, itemque denominatorum seorsim considerentur, iisdem gaudent regulis, quibus integri.*

SCHOLION II.

343. *Superest, ut de proportione* Harmonica *innuamus, quam multi, existimantes eam duntaxat* Musicis *famulari, tanquam cæteris Scientiis parum utilem negligunt, non animadvertentes summum ejusdem usum in enodandis miris naturæ arcanis, quem satis quidem intelligo amplissimum. Tyronibus interea in-*

nuisse sufficiat, proportionem Harmonicam appellari, & quidem discretam, si differentia termini primi à secundo, ita se habeat Geometricè, ad differentiam Tertii à quarto, ut primus ad quartum, aut in continua, differentia primi à secundo ad differentiam secundi à tertio, ut primus ad tertium, & quidem in ratione Geometrica. Sic harmonicè proportionales sunt

$$\overset{2}{12,14} = \overset{4}{20,24},$$ *nam* $2:4 = 12:24$, *quæ est discreta.*

Item continua $\overset{6}{10,16} = \overset{24}{16,40}$, *nam* $6:24 = 10:40$. *quæ si generaliter exprimatur per literas* a, b = c, d; *erit* b—a, d—c = a, d, *quæ est Geometrica, legibusque Geometricis tractanda; cujus ope*, quartus, tertius, *aut* medius *harmonice proportionalis inveniri potest*, *plura oretenus.*

CAPUT V.

De usu Regulæ Aureæ directæ, Inversæ, Simplicis, & compositæ, itemque de Regula Societatis.

344. Regula Aurea, vel Trium est proportio Geometrica, ut (§. 288.) dictum, eaque, vel *simplex*, vel *composita*, *simplex* appellatur quando datis tribus terminis quæritur quartus. *Composita* dicitur, quando datis terminis quinque, quæritur sextus, vel datis septem, quæritur octavus. Utraque hæc dividitur in *Directam*, & *Inversam*; *directa* appellatur, quando, ut primus est ad secundum, ita tertius ad quartum; *Inversa*, quando, ut tertius est ad primum, ita secundus ad quartum.

SCHOLION.

345. *Cum ea, quæ in commercium, usumque communem veniunt, sint* pretiis, temporibus, laboribus *&c. proportionalia, (qui enim duas ulnas emit, necesse est, ut unius ulnæ pretium duplum persolvat, qui tres, triplum &c. item, qui laborat duabus diebus duplam mercedem, qui tribus triplam meretur, & qui fodit duabus diebus, duplum laborem unius diei perficit, qui tribus, triplum &c.) sequitur, per regulam auream* (§. 288.) *seu per proportionem, rectè quæsita inveniri, unde consequitur, ea, quæ per regulam auream indagan-*

gantur, debere esse homogenea; male enim quis ratiocinaretur: urna vini constat 40 groff. ergo 6 metretæ tritici, quanti erunt? cum urna vini, & metretæ non sint homogena. Itaque ad praxim

Usus Regulæ Aureæ simplicis, & directæ.

346. Regula I. Termini ordine in quæstione proposito in proportionem ordinentur. II. Multiplicetur tertius per secundum, factum dividatur per primum (§.288.) quotus erit terminus quartus quæsitus. III. Si occurrant ordinandi termini mixti heterogenei reducibiles, reducantur ante ad speciem minimam omnes termini homologi. *Vide Exempl. II.* IV. Si fractiones immisceantur, reducantur ante ad eandem denominationem, aut tractentur per (§. 148.)

EXEMPLUM I.

3 *Ulnæ panni constant fl. 7, ergo 9 ulnæ, quanti veniunt?*

erunt ordinati $\overset{uln.}{3} : \overset{fl.}{7} = \overset{uln.}{9} : x$, *adeoque per Regul. II.* $x = \frac{7 \cdot 9}{3} = \frac{63}{3} = 21$, *ergo* $\overset{ul.}{3} : \overset{fl.}{7} = \overset{ul.}{9} : \overset{fl.}{21}$, *examen fit per* (§. 286.)

EXEMPLUM II.

2 *libræ, & 12 loth aromatum (ponderis civilis) constant fl. germ. 15, & 24 xr. quanti erunt 5 libræ cum 30 loth ejusdem speciei aromatum?*

Itaque terminos hos Reducendo juxta Reductionum Tabulas III. & IX. (§. 141. Arith.)

erunt 2 *libræ &* 12 *loth* = 76 *loth.*
15 *fl. &* 24 *xr.* = 924 *xr.*
5 *libræ &* 30 *loth* = 190 *loth.*

Unde $\overset{loth}{76} : \overset{xr.}{924} = \overset{loth}{190} : x$, *& hinc* $x = \frac{924 \cdot 190}{76} = \frac{175560}{76} = 2310$ *xr. id est* 38 *fl. &* 30 *xr.*

Regula aurea simplex Inversa.

347. *Cognoscitur esse inversa per (§. 344.) & plerumque ratione temporis occurrit, quo opus aliquod citius, tardiusve perficiendum est; ut si quæras, 4 Murarii exstruunt domum 10 mensibus, ergo 8 murarii,*

varii, quot mensibus construent eandem domum? video itaque inversam, cum 8 murarii longe breviore (quam 10 mensium) tempore opus absolvere debeant. sunt nempe menses in ratione inversa murariorum, hoc est, ut 8 murarii ad 4 murarios, ita 10 menses ad menses quæsitos. Itaque

348. Regula unica: Ordinentur termini ita, ut tertius in quæstione terminus fiat primus, & primus fiat secundus; cætera fiant, ut in regula directa. Vel (*secundum vulgus Arithmeticorum*) ordinentur termini ordine in quæstione proposito; tum multiplicetur primus per secundum, & factum dividatur per tertium.

EXEMPLUM I.

Operæ 100 *intra* 8 *dies excolunt vineam, ergo* 50 *operæ, quot diebus.*

Erit, ut $50 : 100 = 8 : x$ *hoc est* $x = \frac{100 \cdot 8}{50} = \frac{800}{50} = 16$ *dies.*

EXEMPLUM II. VULGARI METHODO.

Militibus 125 *pro diebus* 10 *sufficiunt centum metretæ, ergo* 625 *Militibus, quot diebus sufficient? erit vulgo,* $125 : 10 = 625 : x$, *hoc est* $\frac{10 \cdot 125}{625} = \frac{1250}{625} = 2.$

Usus Regulæ compositæ Directæ.

349. *Regula composita juxta* (§. 344.) *tunc utimur, quando datis* 5, *vel* 7 *terminis quæritur sextus. vel octavus, quæ (si omnes termini sint in ratione directa) appellatur* Directa. *Ad hujus rectum usum eumprimis videndum, quis sit terminus* solitarius? *terminum autem* solitarium *voco, cui* homogeneus *est terminus quæsitus. Itaque*

350. Regula I. Termini omnes, qui ad solitarium spectant, multiplicentur inter se, (*excepto solitario*) & factum ponatur primo loco, in secundo loco ponatur terminus solitarius, tertio loco ponatur productum ex terminis, qui pertinent ad quæsitum. Reg II. Sic reducti termini, & hoc ordine positi tractentur, ut in Regula aurea simplice directa. (§. 346.)

EXEMPLUM.

1000 *fl. per annos* 4 *dant* censum 200 *florenos ? ergo* 3500 *floreni per annos* 6 *quantum* censum *dabunt? In hac quæstione census* 200 *fl. est solitarius, cum quæratur census.*

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad \textit{fl. an. cens.} \quad \textit{fl. an. cens.} \\ \textit{Itaque } (1000 . 4) : 200 = (3500 . 6) : x \\ \textit{hoc est } 4000 : 200 = 21000 : x \\ \textit{unde per } (\S. 346.)\ x = \frac{21000 . 200}{4000} = 1050 \textit{ fl. cens.} \end{array}$$

Regula composita Inversa.

351. Regula Unica: Videatur, qui termini sint in ratione inversa aliorum, hi ante reductionem transponantur ita, ut terminus pertinens ad solitarium, transferatur ad terminos pertinentes ad quæsitum, & vicissim terminus pertinens ad quæsitum transferatur ad terminos solitarii, quo facto per Reg. I. (§. 350.) reducantur, reducti in proportionem ordinentur, & tractentur, per regulam compositam directam.

EXEMPLUM.

8 *Messores demetunt* 50 *jugera intra dies* 10, *igitur* 16 *messores, jugera* 150 *quot diebus demetent. In hac solitarius est* 10 *dies, cum quæsitus, sint dies. Itaque video dies quæsitos esse in ratione inversa messorum, & hinc.*

$$\begin{array}{l} \quad \textit{mess. jug. dies} \quad \textit{mess. jug.} \\ \textit{ut } (16 . 50) : 10 = (8 . 150) : x \\ \textit{hoc est } 800 : 10 = 1200 : x, \textit{ seu } x = \frac{12000}{800} = 15 \textit{ dies.} \end{array}$$

SCHOLION.

Habetur quoque methodus resolvendi quæstiones compositas per repetitas regulas simplices, sed hæc docentis viva voce, aut lectione authorum facile intelligitur.

Usus Regulæ societatis simplicis.

352. *Regula* Societatis (*quæ etiam proportio est*) *appellatur, quando bini, vel plures societatem ineunt lucri causa, conferendo ad faciendum lucrum pecunias particulares, dein elapso certo tempore factum lucrum partiendum est inter socios pro rata collatæ cujusvis pecuniæ.*

353. REGULA. Primo loco semper ponatur tota summa collatorum omnium; secundo loco semper lucrum totale, tertio cujusvis collatum particulare, pro quo quæritur. Hinc quot sunt socii, toties dicto modo regula repetenda est. Itaque

EXEMPLUM.

Tres Mercatores Pterilus, Ponticus, & Cosmophilus inita societate conflarunt summam 1000 *fl. Pterilus contulit* 240 *fl. Ponticus* 300, *Cosmophilus* 460, *hac summa lucrati sunt uno anno omnes simul* 2000 *fl. quæritur quid singuli? Itaque Proportiones pro singulis sic ordinantur:*

Pro Pterilo ut.	1000 : 2000 = 240 : x	*prodit lucr.*	480.
Pro Pontico ut.	1000 : 2000 = 300 : x	*fit lucr.*	600.
Pro Cosmophilo	1000 : 2000 = 460 : x	*habetur*	920.
		lucrum omnium	= 2000.

Regula societatis composita.

354. In hac præter collatum singulorum occurrit etiam tempus, pro quo singuli contulerunt. Hinc antequam termini ad proportionem ordinentur, singulorum collatum per suum tempus multiplicetur, & factum ponatur loco tertio, cætera fiant, ut in regula societatis simplice.

EXEMPLUM.

Iidem Mercatores alio pacto inierunt societatem, ita, ut Pterilus contulerit fl. 100 *pro mens.* 19.
Ponticus fl. 130 *pro mens.* 10.
Cosmophilus fl. 300 *pro mens.* 6.

Exacto hoc tempore lucrati sunt simul fl. 10000 *fl. quantum singuli? ut habeatur collatum singulorum, & summa totalis collata.*

Fiat 100 . 19 *hoc est* 1900 *Pterili collatum.*
130 . 10 - - 1300 *Pontici.*
300 . 6 - - 1800 *Cosmophili.*

Summa collat. 5000.

Itaque pro Pterilo	5000 : 10000 = 1900 : x	*fit*	3800.
Pontico	5000 : 10000 = 1300 : x	*fit*	2600.
Cosmoph.	5000 : 10000 = 1800 : x	*fit*	3600.
		totum lucrum	= 10000.

SCHO-

SCHOLION.

355. *Cum usus Regularum frequenti exercitio condiscatur, nobis autem prolixioribus esse non liceat, idcirco selectissima ad usum exempla, & quæstiones,* Exercitationibus Arithmeticis *in gratiam nostrorum discipulorum edendis, reservamus, quibus Methodum Italicam, & cætera compendia, ac praxes adjungemus.*

CAPUT ULTIMUM.

De Inventione Theorematum, ac Problematum.

356 *Inventio Theorematum, ac Problematum adeo propria est Algebræ, ut nullam fere Æquationem reperias, quæ vel Theorema insigne, aut utile aliquod Problema non eloqueretur, modo mentem advertamus. Itaque tribus (ut ajunt) verbis doctrinam hanc complectar;* Tracta quantitates componendo, æqualia pro æqualibus substituendo, & composita in analogiam, seu proportionem resolvendo, & artem reperisti. *Quapropter*

357. *Ad* Compositionem *pertinent* Additio, *cujus ope reperta habentur Theoremata* (§. 231, 233. *&c.*) Subtractio *per quam detecta habentur Theor.* (232, 234. *&c.*) Multiplicatione, *&* Divisione *innotuerunt Theor.* (§. 182.), *& reliqua potentiarum doctrina, item omnia Partis IV. de proportione.*

358. *Virtutem* Substitutionis *æqualis pro æquali declarant* (§. 247, 248.) *& demonstrationes proportionum à* (§. 276.) *ad Caput. V.*

359. *Infinitum prope Problematum numerum à formularum in analogiam seu proportionem* Resolutione *emanare, nemo est Mathematicorum, qui ignoret; quarum quidem resolutionum artificium in eo consistit, ut ita termini resolvantur, & in proportionem ordinentur, ut factum extremorum, semper sit æquale facto mediorum, quemadmodum à* (§. 291.) *ad Cap. V. ostensum est. Hic animadvertendum præterea, quod si formula per Hypothesim divisionis expressa in analogiam solvenda, totus divisor pro primo, reliqui factores Numeratoris, seu dividendi,* secundo, *& tertio loco*

loco constituantur. Sic hæc Ex. gr. *Æquatio* $x = \frac{ad-dc}{a-b}$ *ita resolvetur;* $a-b : a-c = d : x$, *aut* $a-b : d = a-c : x$, *item hæc* $x = \frac{a}{b}$, *ita* $b : a = 1 : x$, *item* $\frac{3ab}{2c}$, *ita* $2c : 3a = b : x$, *vel* $2c : 3b = a : x$, *vel* $2c : 3 = ab : x$, *ut patet. Sed hæc, & cætera docentium industriæ una cum reflexionibus, relinquo.*

359. *Ut fidem* (§. 384.) *datam exsolvam, sint ope Analysis demonstranda Theoremata.*

360. THEOREMA: Quantitas positiva per negativam, vel vicissim multiplicata, dat negativum productum, *hoc est* $(a-b) \cdot +c$, *dat productum* $+ac-bc$; *cum cuicunque quantitati æqualis assignari possit aliqua quantitas sit illa* d; *erit* $a-b = d$, *& per Metathesim* $a = d+b$, *& per* $+c$ *multiplicando utramque partem, erit* $ac = dc+bc$, *& per Metathesim* $ac-bc = dc$, *unde cum inter* $a-b$, *&* d *fuerit æqualitas, & iterum inter* $ac-bc$, *&* dc *sit æqualitas, sequitur multiplicando* $a-b$ *per* c, *fieri debere* $ac-bc$, *& non* $ac+bc$.

361. THEOREMA. Quantitas negativa per negativam multiplicata, dat positivam: *hoc est* $(a-b) \cdot -c$ *dat* $-ac+bc$. *Sit* $a-b = d$, *erit per Metathesim* $a = d+b$, *multiplicetur pars utraque per* $-c$, *erit per prius demonstrata* $-ac = -dc-bc$, *& per Metathesim* $-ac+bc = -dc$, *sed* $-ac+bc$, *est factum ex* $a-b$ *in* $-c$, *ergo.*

362. THEOREMA. Factum duarum fractionum $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$, *esse debet* $\frac{ac}{bc}$, *ut* (§. 140. *&* 141.) *dictum.*

DEMONSTRATIO. *Omnis fractio est Ratio Geometrica per* (§. 272.) *Ratio verò Geometrica est divisio per* (§. 272.) *sed in divisione divisor est ad dividendum, sicut unitas ad quotum, per* (§.60. *Arit.*) *unde, fractio* $\frac{a}{b}$ *resolvitur in hanc* $b : a = 1 : \frac{a}{b}$ *per* (§. 288.)

& $\frac{c}{d}$ *resolvitur in hanc* $d : c = 1 : \frac{c}{d}$ *per* (§. 288.)

ergo

ergo per (§.296.) $(b.d):(a.c)=(1.1):\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$

hoc est $bd:ac=1:\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$

seu $\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ *quod erat Demonst.*

SCHOLION.

362. *Ex his, & cæteris hucusque declaratis, satis liquet* Arithmeticam numericam *omne suum pretium* Algebræ *debere, quanta verò incrementa cætera disciplinæ ab Analysi sumpserint, erudita Recentiorum volumina his formulis locupletata, loquuntur. Postremum Tyronibus proficere volentibus tam in Arithmetica numerica, quam literali non inutile censui quosdam Authores indicare, à quibus, quæ à me ob temporis angustias, necessario, aut prætermittenda, aut certe strictim pertractanda fuere, petere valeant. Itaque Arithmeticam ad captum Tyronum præclare concinnârunt,* P. Christophorus Clavius, è Soc. JEsu, *cujus* Epitome Arithmeticæ practicæ, *sæpissimè recusa, Authorem, à facilitate doctrinæ commendat; Theoriam praxi junxit,* R. P. Andreas Tacquet, *S. J. in sua* Theoria, & praxi Arithmetices. *Arithmeticam, & Algebram in usum Tyronem dedere* R. P. Erasmus Frœlich, è Soc. J. *sub Titulo:* Introductio facilis in Mathesim Viennæ 1746. *in 8vo, opusculum singulare.* Crivellii Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis, *latinè, & auctiora reddita Viennæ* 1745. *in 8vo.* R.P. Lechi, è S. J. Arithmetica universalis Neutoni. *His accedunt* Tabulæ Mnemonicæ ex Primis universæ Matheseos Elementis concinnatæ à R.P. Philippo Steinmeyer, S.J. Augustæ Vindel. 1750. *in 8vo. Item* R. P. Josephi Liesganigg, è S. J. Tabulæ Memoriales Recolendis Matheseos Elementis Servientes, Viennæ 1753. *in 4to.*

Cursus Mathematici commendantur: R. P. Caspari Schotti, è S. J. & R. P. Claudii Milliet Dechales, è S. J. *Notissima sunt* Illust. Christiani Wolffii Elementa Mathematica, & eorundem Compendium; *item* Ozanam Cours de Mathematique; Institutiones Matheseos Weidleri, & Wiederburgii; *item* Poëtii Introductio in Arithmeticam Idio-

Idiomate Germ. è quibus singulis prima Matheseos Elementa, si quando Tyrones petent, meminisse una mecum velim, moniti D. Pauli: *Omnia in Gloriam DEI facite.* I. ad Cor. 4. v. 31.

FINIS ELEMENTORUM ALGEBRÆ, *ET* PRIMI TOMULI.

Errata quædam.

Pag.	*loco.*		*Lege.*
16	*Exempl. V.*	7 0.0.4.0.0.3	7.0.0 4.0.0.3
28	*lin.* 1. *ante Ex. gr.*	*pone* ,	*vel vicissim.*
63	*Exempl. I.*	5891	5901
		0 / //	0 / //
Ibidem		61,60,76.	61,70,76.
81	*Exempl. IV.*	110	100.
84	*Tab. XII. faciunt*	1)	*faciunt* $1\frac{1}{2}$ *mensuram, vel Ung. Cupā.*
86	*lin. penul.*	160	190.
115	*lin.* 11.	*laudibile*	*laudabile*
217	*Paragraph.* 192. *linea* 2.	(§. 174.)	(§. 173.)
243	*lin.* 15.	2x = 24b	2x = 24c.

Cætera leviora B. L. corriget.

INDEX PROBLEMATUM.

PARTIS I.

De Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.

PARTIS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

PARTIS III.

De Analysi speciosa seu arte Resolvendi Problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

Ope-

PARTIS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problem.

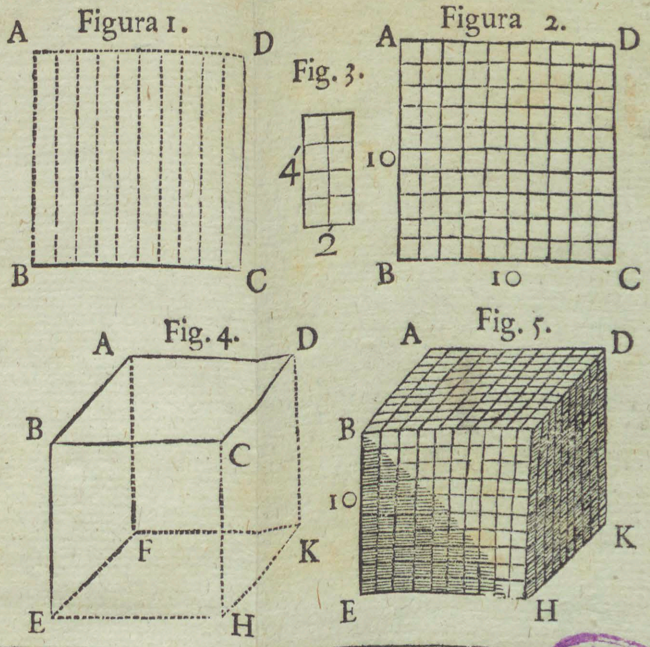
De Progressione Geometrica.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

De Regula Aurea.

O. A. M. D. G.

TABULA LOGISTICÆ DECIMALIS.



TABULA ALGEBRÆ.